

Indice

Introduzione	1
1 Filtro di Kalman e filtro di Kalman esteso	5
1.1 Il filtro di Kalman	6
1.2 Il filtro di Kalman esteso (EKF)	9
2 Il filtro di Kalman polinomiale esteso	13
2.1 Formulazione del problema	14
2.2 L'approssimazione di Carleman	15
2.3 L'algoritmo di filtraggio polinomiale	20
2.4 Lemmi	22
3 La stima simultanea di stato e parametri	26
3.1 Discretizzazione per sistemi lineari a tempo continuo	27
3.2 La stima simultanea di stato e parametri (caso lineare)	30
3.3 La stima simultanea di stato e parametri nel caso non lineare	32
4 Filtro di Kalman quadratico esteso	34

4.1	Formulazione del problema	34
4.2	METODO 1 (metodo uniforme)	37
4.2.1	Calcolo dei momenti di ordine superiore di stato e rumori	37
4.2.2	I vettori estesi di stato e di uscita	40
4.2.3	L'approssimazione di ordine 2 del sistema	41
4.2.4	Equazione dello stato esteso	43
4.2.5	Equazione dell'uscita estesa	45
4.2.6	Calcolo delle condizioni iniziali del filtro	47
4.2.7	Calcolo delle covarianze dei rumori estesi	48
4.3	METODO 2 (metodo gaussiano)	50
4.3.1	L'approssimazione di ordine 2 del sistema	52
4.3.2	Equazione dello stato esteso	57
4.3.3	Equazione dell'uscita estesa	58
4.3.4	Calcolo delle condizioni iniziali del filtro	59
4.3.5	Calcolo delle covarianze dei rumori estesi	60
5	Filtro di Kalman cubico esteso	66
5.1	Formulazione del problema e calcolo dei momenti	66
5.2	I vettori estesi di stato e uscita	70
5.3	L'approssimazione di ordine 3 del sistema	72
5.4	Equazione dello stato esteso	74
5.5	Equazione dell'uscita estesa	76
5.6	Calcolo delle condizioni iniziali del filtro	78
5.7	Calcolo delle covarianze dei rumori estesi	79

<i>INDICE</i>	iii
6 Implementazione del filtro e simulazione	82
6.1 Il sistema	83
6.2 Descrizione delle simulazioni	85
6.3 Risultati delle simulazioni	87
6.4 Conclusioni	118
Appendice A : Cenni di algebra di Kronecker	120
Appendice B : Codice MATLAB	126
Bibliografia	172

Introduzione

La teoria dell'Identificazione

I moderni problemi dell'ingegneria nel suo quotidiano cammino di sviluppo scientifico e tecnologico hanno portato, nell'ultimo secolo, alla riscoperta di un interesse per le scienze applicate e alla ricerca di algoritmi e metodologie che potessero dare una risposta concreta a problemi reali.

In questo contesto nasce, a partire dagli anni trenta del Novecento, la teoria dell'*Identificazione* che, come altre branche della scienza, riceve in quegli anni notevole impulso dagli eventi bellici. Pioniere della materia è Norbert Wiener, professore di matematica al MIT di Boston e fondatore della cibernetica.

La teoria dell'Identificazione costituisce quella parte della Scienza dei Sistemi che punta ad ottenere informazioni quantitative su un sistema a partire dalle osservazioni compiute su di esso. Le problematiche fondamentali dell'Identificazione sono la *stima dello stato* e l'*identificazione dei parametri*, e di queste ci si occuperà in questo lavoro.

L'altro protagonista indiscusso della moderna teoria dell'Identificazione è Rudolf Emil Kalman, il cui lavoro dà un impulso fondamentale alla teoria del *filtraggio*, cioè alla ricostruzione dello stato per sistemi stocastici. Il problema è risolto

infatti in modo ottimo, se sono verificate opportune condizioni sul sistema e sui rumori, dal famoso *filtro di Kalman*.

Il filtro di Kalman e le sue estensioni

Il filtro di Kalman è un algoritmo ricorsivo che risolve il problema della stima ottima dello stato per sistemi lineari a tempo discreto con rumore bianco gaussiano additivo che agisce sullo stato e sulle osservazioni dell'uscita. Per stima ottima si intende *stima a minima varianza dell'errore*.

La teoria del suddetto filtro è ancora oggi oggetto di ricerca, al fine di estenderne i risultati e l'applicabilità.

Un primo risultato, in tal senso, è costituito dal *filtro di Kalman esteso*, utilizzato per la stima dello stato nei sistemi non lineari. Esso consiste nell'applicare alla linearizzazione del sistema intorno alla stima corrente il filtro di Kalman nella sua formulazione classica.

Migliorando l'approssimazione del sistema arrestando il suo sviluppo in serie a un ordine superiore al primo, si costruisce uno stimatore tanto migliore quanto maggiore è il grado dello sviluppo polinomiale, che prende il nome di *filtro di Kalman polinomiale esteso*. Arrestando lo sviluppo in serie al primo ordine, il filtro polinomiale coincide con il filtro di Kalman esteso.

Inoltre tecniche di discretizzazione permettono di applicare tali stimatori anche a sistemi tempo-continui con osservazioni discrete.

Per una trattazione compatta ed elegante, si ricorrerà all'algebra di Kronecker e all'approssimazione di Carleman di una funzione vettoriale, che generalizza lo

sviluppo in serie di Taylor per funzioni scalari. Tali argomenti sono trattati in maniera estesa nell'appendice.

La stima simultanea di stato e parametri

Oggetto di questo lavoro è la *stima simultanea di stato e parametri* di un sistema.

Lo *stato* di un sistema è l'insieme delle grandezze, non direttamente misurabili, che ne descrivono la dinamica, mentre l'*uscita* rappresenta l'insieme delle grandezze direttamente misurabili, che sono quindi oggetto di osservazione.

Il sistema si ritiene noto a meno di alcuni *parametri incogniti*, che andranno stimati.

Una classe importante di sistemi a poter essere presa in esame è quella dei *sistemi non lineari a tempo continuo con rumore bianco additivo* che agisce sullo stato e sulle osservazioni dell'uscita. Dapprima i parametri incogniti vengono inclusi nel vettore di stato (in modo che possano essere stimati). Dopodichè vengono definiti opportuni vettori estesi di stato e di uscita, e il risultante sistema esteso viene discretizzato. Infine viene applicato a tale sistema discretizzato esteso il filtro polinomiale di un prefissato ordine.

In sede di simulazione, viene analizzato un semplice esempio di sistema di cui è necessario stimare stato e parametri. A tale sistema viene applicato lo stimatore studiato nella parte precedente e la stima ottenuta con il filtro polinomiale viene confrontata con quella ottenuta mediante il filtro di Kalman esteso, mettendo in luce così l'eventuale miglioramento della stima.

Il lavoro è così strutturato: nel capitolo 1 viene richiamata la teoria del filtro di Kalman e del filtro di Kalman esteso; nel capitolo 2, viene sviluppata la teoria

dell'approssimazione di Carleman e del filtro di Kalman polinomiale esteso; nel capitolo 3, dapprima viene richiamata la tecnica di discretizzazione e la stima simultanea di stato e parametri per sistemi lineari, quindi viene analizzato il caso non lineare, tramite l'estensione dei risultati già ottenuti per i sistemi lineari; nel capitolo 4, viene analizzato un esempio semplice di sistema e viene costruito il *filtro quadratico* per la stima simultanea di stato e parametri di tale sistema, cioè viene particolarizzato il filtro polinomiale al caso di approssimazione di ordine 2 del sistema; analogamente nel capitolo 5, al fine di migliorare ulteriormente lo stimatore, si costruisce il *filtro cubico*, cioè di ordine 3; infine nel capitolo 6 il sistema viene simulato, viene applicato l'algoritmo di filtraggio polinomiale (variando l'ordine dello stimatore), quindi vengono discussi i risultati delle simulazioni. L'appendice A approfondisce l'algebra di Kronecker e l'appendice B riporta il codice MATLAB implementato in sede di simulazione.

Capitolo 1

Filtro di Kalman e filtro di Kalman esteso

Il filtro di Kalman è un algoritmo ricorsivo che risolve il problema della stima ottima dello stato in sistemi lineari (anche non stazionari) a tempo discreto con rumore gaussiano che agisce sullo stato e sulle osservazioni dell'uscita (si veda [1], [8], [17], [18], [20]).

Per sistemi non lineari a tempo discreto, lo stesso problema non è risolto nel caso generale. Per la stima dello stato, può essere utilizzato il filtro di Kalman esteso (EKF), che risolve il problema (in modo non ottimo) applicando il filtro di Kalman nella sua formulazione classica alla linearizzazione del sistema intorno alla stima corrente. La bontà della stima dipenderà dall'errore iniziale di stima, poichè, quanto minore è questo errore, tanto migliore sarà l'approssimazione e quindi la stima ottenuta.

La ricerca di un algoritmo ricorsivo per la stima è dettata dal fatto che, in questo modo, è possibile buttare via le osservazioni precedenti, mantenendo solo

quella all'istante corrente; per questo fatto si preferisce un algoritmo del genere a un altro che, dovendo conservare tutte le osservazioni, avrebbe bisogno di memoria sempre crescente, col passare del tempo.

1.1 Il filtro di Kalman

Oggetto di studio sono i sistemi lineari a tempo discreto con rumori additivi di stato e di osservazione. Il generico sistema in esame sarà quindi descritto dalle seguenti equazioni:

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k) + F(k)N_k \quad (1.1.1)$$

$$y(k) = C(k)x(k) + D(k)u(k) + G(k)N_k \quad (1.1.2)$$

con $x \in \mathbb{R}^n$, $u(k) \in \mathbb{R}^p$, $y(k) \in \mathbb{R}^q$.

Lo stato all'istante k è $x(k)$.

L'ingresso deterministico all'istante k è $u(k)$.

Il rumore di stato all'istante k è $v(k) = F(k)N_k$.

Il rumore di osservazione all'istante k è $w(k) = G(k)N_k$.

Le matrici $A(k)$, $B(k)$, $C(k)$, $D(k)$, $F(k)$, $G(k)$ sono di dimensioni opportune.

Con ipotesi di *stazionarietà*, esse sono costanti e non dipendono da k .

La sequenza $\{N_k\}$ è *gaussiana bianca standard*, cioè si ha:

$$E \{N_k\} = 0 \quad \forall k \quad (1.1.3)$$

$$E \{ N_k N_j^T \} = I \delta_{kj} \quad \forall k, j \quad (1.1.4)$$

indicando con δ_{kj} la *delta di Kronecker*, definita nel modo seguente:

$$\delta_{kj} = 1 \quad \text{se } k = j \quad (1.1.5)$$

$$\delta_{kj} = 0 \quad \text{se } k \neq j. \quad (1.1.6)$$

I rumori di stato e di osservazione si ipotizzano (anche in seguito) a media nulla perchè, in caso contrario, è sufficiente considerare una componente costante additiva (pari al valore atteso) per riportarsi al caso suddetto.

Considerando il caso $F(k)G^T(k) = 0 \quad \forall k$, i rumori di stato e di osservazione sono scorrelati per ogni istante :

$$\begin{aligned} E \{ v(k)w^T(j) \} &= E \{ F(k)N_k N_j^T G^T(j) \} = \\ &= F(k)I \delta_{kj} G^T(j) = \\ &= F(k)G^T(j) \delta_{kj} = 0 \quad \forall k, j \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

Lo stato iniziale $x(0)$ è una variabile aleatoria *gaussiana* di media e covarianza note, e indipendente dai rumori:

$$x(0) \in \mathcal{G}(m_{x(0)}, \Psi_{x(0)}) \quad x(0) \perp N_k. \quad (1.1.8)$$

Con queste ipotesi, poichè la gaussianità si conserva con combinazioni lineari, lo stato e l'uscita sono gaussiani per ogni istante k , e quindi il problema della stima ottima è risolto dal filtro di Kalman, i cui passi sono i seguenti:

FILTRO DI KALMAN

(I) Condizioni iniziali

$$\hat{x}(0 | -1) = E \{ x(0) \} = m_{x(0)} \quad P_p(0) = \Psi_{x(0)} \quad k = -1;$$

(II) Calcolo della predizione dell'uscita

$$\hat{y}(k+1 | k) = C(k+1)\hat{x}(k+1 | k) + D(k+1)u(k+1) ;$$

(III) Calcolo del guadagno di Kalman $K(k+1)$

$$K(k+1) = P_p(k+1)C^T(k+1)(C(k+1)P_p(k+1)C^T(k+1)+G(k+1)G^T(k+1))^{-1} ;$$

(IV) Calcolo della covarianza dell'errore di stima $P(k+1)$

$$P(k+1) = [I - K(k+1)C(k+1)]P_p(k+1) ;$$

(V) Calcolo della stima ottima dello stato $\hat{x}(k+1 | k+1)$

$$\hat{x}(k+1 | k+1) = \hat{x}(k+1 | k) + K(k+1)(y(k+1) - \hat{y}(k+1 | k));$$

(VI) Incremento contatore $k = k+1$;

(VII) Calcolo della predizione ottima dello stato

$$\hat{x}(k+1 | k) = A(k)\hat{x}(k | k) + B(k)u(k);$$

(VIII) Calcolo della covarianza dell'errore di predizione $P_p(k+1)$

$$P_p(k+1) = A(k)P(k)A^T(k) + F(k)F^T(k) ;$$

(IX) Torna al passo (II).

Osservazione: sotto opportune ipotesi, il filtro di Kalman, che in generale tende a un valore dipendente dai valori di innesco, può essere *asintoticamente ottimo*, cioè insensibile a $P_p(0)$ (si veda [1]).

1.2 Il filtro di Kalman esteso (EKF)

Oggetto di studio sono i sistemi non lineari a tempo discreto con rumori additivi di stato e di osservazione. Il generico sistema in esame sarà quindi descritto dalle seguenti equazioni:

$$x(k+1) = f(k, x(k), u(k)) + F(k)N_k \quad (1.2.1)$$

$$y(k) = h(k, x(k), u(k)) + G(k)N_k \quad (1.2.2)$$

con $x \in \mathbb{R}^n$, $u(k) \in \mathbb{R}^p$, $y(k) \in \mathbb{R}^q$, $x(0) = x_0$.

Lo stato all'istante k è $x(k)$.

L'ingresso deterministico all'istante k è $u(k)$.

Il rumore di stato all'istante k è $v(k) = F(k)N_k$.

Il rumore di osservazione all'istante k è $w(k) = G(k)N_k$.

$f(\cdot)$ ed $h(\cdot)$ sono funzioni non lineari dello stato, dell'ingresso e dell'istante di tempo k .

Con ipotesi di stazionarietà, $f(\cdot)$, $h(\cdot)$, F e G non dipendono da k .

Si ipotizzi che per le sequenze di rumore e per lo stato iniziale valgano le stesse ipotesi fatte nel paragrafo precedente (1.1.3, 1.1.4 e 1.1.8), tenendo conto che potrebbe anche essere rimossa l'ipotesi di gaussianità, non trattandosi di una stima ottima.

Il filtro di Kalman esteso è, come si è già detto, la naturale estensione del filtro di Kalman ai sistemi non lineari; le equazioni del filtro, precedentemente viste,

vengono applicate alla linearizzazione del sistema attorno alla stima corrente e alla predizione a un passo, rispettivamente:

$$x(k+1) \approx f(k, \hat{x}(k | k), u(k)) + \frac{df}{dx} \Big|_{x=\hat{x}(k|k)} (x(k) - \hat{x}(k | k)) + F(k)N_k \quad (1.2.3)$$

$$y(k) \approx h(k, \hat{x}(k | k-1), u(k)) + \frac{dh}{dx} \Big|_{x=\hat{x}(k|k-1)} (x(k) - \hat{x}(k | k-1)) + G(k)N_k. \quad (1.2.4)$$

Definendo le predizioni a un passo nel seguente modo:

$$\hat{x}(k+1 | k) = f(k, \hat{x}(k | k), u(k)) \quad (1.2.5)$$

$$\hat{y}(k+1 | k) = h(k+1, \hat{x}(k+1 | k), u(k+1)) \quad (1.2.6)$$

indicando con $A(k)$ e $C(k)$ le matrici Jacobiane

$$A(k) = \frac{df}{dx} \Big|_{x=\hat{x}(k|k)} \quad (1.2.7)$$

$$C(k) = \frac{dh}{dx} \Big|_{x=\hat{x}(k|k-1)} \quad (1.2.8)$$

definendo i seguenti ingressi deterministici

$$u_s(k) = \hat{x}(k+1 | k) - A(k)\hat{x}(k | k) \quad (1.2.9)$$

$$u_o(k) = \hat{y}(k | k-1) - C(k)\hat{x}(k | k-1) \quad (1.2.10)$$

e infine sostituendo al segno \approx quello di uguaglianza, il sistema assume l'espressione di un sistema lineare:

$$x(k+1) = A(k)x(k) + u_s(k) + F(k)N_k \quad (1.2.11)$$

$$y(k) = C(k)x(k) + u_o(k) + G(k)N_k \quad (1.2.12)$$

e sono quindi applicabili le equazioni del filtro viste in precedenza.

E' bene ricordare nuovamente che la stima dello stato in questo caso non risulta ottima. Anzi, non è nemmeno garantito che l'errore di stima si mantenga limitato.

FILTRO DI KALMAN ESTESO (EKF)

(I) Condizioni iniziali

$$\hat{x}(0 | -1) = \hat{x}_0 \quad P_p(0) = \Psi_{x(0)} \quad k = -1;$$

(II) Calcolo della predizione dell'uscita

$$\hat{y}(k + 1 | k) = h(k + 1, \hat{x}(k + 1 | k), u(k + 1));$$

(III) Calcolo della matrice Jacobiana della h in $\hat{x}(k + 1 | k)$

$$C(k) = \frac{dh}{dx}(k + 1, x, u(k + 1) |_{x=\hat{x}(k+1|k)});$$

(IV) Calcolo del guadagno $K(k + 1)$

$$K(k+1) = P_p(k+1)C^T(k+1)(C(k+1)P_p(k+1)C^T(k+1)+G(k+1)G^T(k+1))^{-1};$$

(V) Calcolo della matrice $P(k + 1)$

$$P(k + 1) = [I - K(k + 1)C(k + 1)]P_p(k + 1);$$

(VI) Calcolo della stima $\hat{x}(k + 1 | k + 1)$

$$\hat{x}(k + 1 | k + 1) = \hat{x}(k + 1 | k) + K(k + 1)(y(k + 1) - \hat{y}(k + 1 | k));$$

(VII) Incremento contatore $k = k + 1$;

(VIII) Calcolo della predizione dello stato

$$\hat{x}(k + 1 | k) = f(k, \hat{x}(k | k), u(k));$$

(IX) Calcolo della matrice Jacobiana della f in $\hat{x}(k | k)$

$$A(k) = \frac{df}{dx}(k, x, u(k)) \Big|_{x=\hat{x}(k|k)} ;$$

(X) Calcolo della matrice $P_p(k + 1)$

$$P_p(k + 1) = A(k)P(k)A^T(k) + F(k)F^T(k) ;$$

(XI) Torna al passo (II).

Osservazione 1: Come già detto, poichè il filtro si basa su un'approssimazione del sistema, il suo comportamento sarà tanto migliore quanto minore sarà l'errore iniziale di stima.

Osservazione 2: A differenza del filtro di Kalman tradizionale, per cui il calcolo delle matrici di guadagno e covarianza può essere fatto fuori linea, nell'EKF esse vanno calcolate a ogni passo in funzione delle osservazioni, insieme alle matrici $A(k)$ e $C(k)$; pertanto l'implementazione del filtro di Kalman esteso è notevolmente più onerosa dal punto di vista del calcolo (si veda [1] , [4] , [13]).

Capitolo 2

Il filtro di Kalman polinomiale esteso

Il filtro di Kalman esteso (EKF) applica le equazioni del filtro, come si è visto, alla linearizzazione (approssimazione al primo ordine) del sistema intorno alla stima corrente.

Con l'aiuto dell'algebra di Kronecker, grazie alla quale assume un senso il concetto di potenza di un vettore, si migliora l'approssimazione del sistema con termini di ordine superiore e si costruisce il filtro di Kalman polinomiale esteso (PEKF). Quando il grado dell'approssimazione è uguale a 1, i due filtri coincidono.

Rispetto al filtro di Kalman esteso, ci si aspetta quindi un miglioramento della stima all'aumentare del grado dello sviluppo polinomiale a cui ci si arresta.

2.1 Formulazione del problema

La classe di sistemi allo studio sono i sistemi non lineari a tempo discreto, con rumore additivo che agisce sullo stato e sulle osservazioni dell'uscita. Il modello di riferimento è il seguente:

$$x(k+1) = f(k, x(k)) + F(k)N_k \quad (2.1.1)$$

$$y(k) = h(k, x(k)) + G(k)N_k \quad (2.1.2)$$

con $x \in \mathbb{R}^n$, $y(k) \in \mathbb{R}^q$, $x(0) = x_0$.

Lo stato all'istante k è $x(k)$.

Il rumore di stato all'istante k è $v(k) = F(k)N_k$.

Il rumore di osservazione all'istante k è $w(k) = G(k)N_k$.

$f(\cdot)$ ed $h(\cdot)$ sono funzioni non lineari dello stato e dell'istante di tempo k .

Con ipotesi di stazionarietà, $f(\cdot)$, $h(\cdot)$, F e G non dipendono da k .

Rispetto al filtro di Kalman esteso, per la cui costruzione servivano solo valori medi e covarianze, un filtro polinomiale necessita della conoscenza di momenti di ordine superiore.

Pertanto si farà l'ipotesi che $v(k)$ e $w(k)$ siano sequenze di vettori aleatori indipendenti e a media nulla, non necessariamente gaussiani, con momenti finiti e noti fino all'ordine 2μ :

$$E \{v^{[i]}(k)\} = \xi_i^v(k) < \infty \quad i = 1, \dots, 2\mu \quad (2.1.3)$$

$$E \{w^{[i]}(k)\} = \xi_i^w(k) < \infty \quad i = 1, \dots, 2\mu \quad (2.1.4)$$

dove l'apice $[i]$ indica la *potenza i -esima di Kronecker*.

Lo stato iniziale x_0 è un vettore aleatorio indipendente dalle sequenze di rumore, con momenti finiti e noti fino all'ordine 2μ , cioè risulta:

$$E \left\{ x_0^{[i]}(k) \right\} = \zeta_i^0(k) < \infty \quad i = 1, \dots, 2\mu . \quad (2.1.5)$$

Il prodotto di Kronecker tra 2 vettori $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^p$ è un vettore in \mathbb{R}^{np} così definito:

$$x \otimes y = \begin{bmatrix} x_1 y \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n y \end{bmatrix} \quad (2.1.6)$$

Consistentemente con tale definizione, la *potenza di Kronecker* di un vettore è definita nel modo seguente:

$$x^{[0]} = 1 \quad (2.1.7)$$

$$x^{[i]} = x \otimes x^{[i-1]} \quad i \geq 1. \quad (2.1.8)$$

Tali argomenti sono trattati più approfonditamente nell'appendice A dedicata all'algebra di Kronecker.

2.2 L'approssimazione di Carleman

L'approssimazione di Carleman permette di scrivere lo sviluppo in serie di una funzione vettoriale non lineare in un modo compatto ed elegante, analogo allo sviluppo in serie di Taylor per funzioni scalari.

Lo sviluppo delle funzioni non lineari $f(\cdot)$ ed $h(\cdot)$, precedentemente definite, intorno a un generico punto \tilde{x} è quindi il seguente:

$$x(k+1) = \sum_{i=0}^{\infty} F_{1,i}(k, \tilde{x})(x(k) - \tilde{x})^{[i]} + F(k)N_k \quad (2.2.1)$$

$$y(k) = \sum_{i=0}^{\infty} H_{1,i}(k, \tilde{x})(x(k) - \tilde{x})^{[i]} + G(k)N_k \quad (2.2.2)$$

con

$$F_{1,i}(k, \tilde{x}) = \frac{1}{i!}(\nabla_x^{[i]} \otimes f) \quad H_{1,i}(k, \tilde{x}) = \frac{1}{i!}(\nabla_x^{[i]} \otimes h) \quad k \geq 0. \quad (2.2.3)$$

L'operatore $[\nabla_x^{[i]} \otimes]$ applicato a una funzione f è definito nel modo seguente:

$$\nabla_x^{[0]} \otimes f = f \quad (2.2.4)$$

$$\nabla_x^{[i]} \otimes f = \nabla_x \otimes \nabla_x^{[i-1]} \otimes f \quad (2.2.5)$$

con $\nabla_x = \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial}{\partial x_n} \right]$.

Allo stesso modo, per le potenze di Kronecker dello stato e dell'uscita, si ha:

$$x^{[m]}(k+1) = \sum_{i=0}^{\infty} F_{m,i}(k, \tilde{x})(x(k) - \tilde{x})^{[i]} + \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_{m,i}(k, \tilde{x}, v(k))(x(k) - \tilde{x})^{[i]} \quad (2.2.6)$$

$$y^{[m]}(k) = \sum_{i=0}^{\infty} H_{m,i}(k, \tilde{x})(x(k) - \tilde{x})^{[i]} + \sum_{i=0}^{\infty} \theta_{m,i}(k, \tilde{x}, w(k))(x(k) - \tilde{x})^{[i]} \quad (2.2.7)$$

con

$$F_{m,i}(k, \tilde{x}) = \frac{1}{i!}(\nabla_x^{[i]} \otimes f^{[m]}) \quad H_{m,i}(k, \tilde{x}) = \frac{1}{i!}(\nabla_x^{[i]} \otimes h^{[m]}) \quad k \geq 0 \quad (2.2.8)$$

$$\varphi_{m,i}(k, \tilde{x}, v(k)) = \frac{1}{i!}(\nabla_x^{[i]} \otimes [(f+v)^{[m]} - f^{[m]}]) \quad (2.2.9)$$

$$\theta_{m,i}(k, \tilde{x}, w(k)) = \frac{1}{i!} (\nabla_x^{[i]} \otimes [(h+w)^{[m]} - h^{[m]}]). \quad (2.2.10)$$

Si nota da queste espressioni che le sequenze $v(k)$ e $w(k)$ compaiono come *rumori moltiplicativi* nelle espressioni delle potenze dei vettori di stato e uscita.

L'approssimazione di grado μ delle potenze di stato e uscita si ottiene arrestando le precedenti sommatorie ai termini μ -esimi:

$$[x^{[m]}(k+1)]_\mu \approx \sum_{i=0}^{\mu} F_{m,i}(k, \tilde{x})(x(k) - \tilde{x})^{[i]} + \sum_{i=0}^{\mu} \varphi_{m,i}(k, \tilde{x}, v(k))(x(k) - \tilde{x})^{[i]} \quad (2.2.11)$$

$$[y^{[m]}(k)]_\mu \approx \sum_{i=0}^{\mu} H_{m,i}(k, \tilde{x})(x(k) - \tilde{x})^{[i]} + \sum_{i=0}^{\mu} \theta_{m,i}(k, \tilde{x}, w(k))(x(k) - \tilde{x})^{[i]}. \quad (2.2.12)$$

Nell'appendice A si mostra che

$$[g^{[m]}]_\mu = [[g]_\mu^{[m]}]_\mu \quad (2.2.13)$$

e quindi nelle precedenti espressioni i termini a sinistra del segno \approx possono essere sostituiti semplicemente da $x_\mu^{[m]}(k+1)$ e $y_\mu^{[m]}(k)$. Si dimostra che $x_\mu^{[m]}$ e $y_\mu^{[m]}$ evolvono secondo le seguenti espressioni:

$$x_\mu^{[m]}(k+1) = \sum_{i=1}^{\mu} A_{m,i}^\mu(k, \tilde{x}) x_\mu^{[i]}(k) + u_m^\mu(k, \tilde{x}) + v_m^\mu(k, \tilde{x}) \quad (2.2.14)$$

$$y_\mu^{[m]}(k) = \sum_{i=1}^{\mu} C_{m,i}^\mu(k, \tilde{x}) x_\mu^{[i]}(k) + \gamma_m^\mu(k, \tilde{x}) + w_m^\mu(k, \tilde{x}) \quad (2.2.15)$$

dove i fattori $A_{m,i}^\mu(k, \tilde{x})$ e $C_{m,i}^\mu(k, \tilde{x})$ assumono opportune espressioni (riportate a

fine capitolo), $u_m^\mu(k, \tilde{x})$ e $\gamma_m^\mu(k, \tilde{x})$ sono *drift deterministici* e $\{v_m^\mu\}$ e $\{w_m^\mu\}$ sono sequenze aleatorie.

Definendo opportuni vettori estesi:

$$X^\mu(k) = \begin{bmatrix} x_\mu(k) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_\mu^{[\mu]}(k) \end{bmatrix} \quad Y^\mu(k) = \begin{bmatrix} y_\mu(k) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_\mu^{[\mu]}(k) \end{bmatrix} \quad (2.2.16)$$

$$\mathcal{U}^\mu(k, \tilde{x}) = \begin{bmatrix} u_1^\mu(k, \tilde{x}) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_\mu^\mu(k, \tilde{x}) \end{bmatrix} \quad \Gamma^\mu(k, \tilde{x}) = \begin{bmatrix} \gamma_1^\mu(k, \tilde{x}) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \gamma_\mu^\mu(k, \tilde{x}) \end{bmatrix} \quad (2.2.17)$$

$$V^\mu(k, \tilde{x}) = \begin{bmatrix} v_1^\mu(k, \tilde{x}) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_\mu^\mu(k, \tilde{x}) \end{bmatrix} \quad W^\mu(k, \tilde{x}) = \begin{bmatrix} w_1^\mu(k, \tilde{x}) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ w_\mu^\mu(k, \tilde{x}) \end{bmatrix} \quad (2.2.18)$$

il sistema assume la seguente forma:

$$X^\mu(k+1) = A^\mu(k, \tilde{x})X^\mu(k) + \mathcal{U}^\mu(k, \tilde{x}) + V^\mu(k, \tilde{x}) \quad (2.2.19)$$

$$Y^\mu(k) = C^\mu(k, \tilde{x})X^\mu(k) + \Gamma^\mu(k, \tilde{x}) + W^\mu(k, \tilde{x}) \quad (2.2.20)$$

con

$$A^\mu = \begin{bmatrix} A_{1,1}^\mu & \cdot & \cdot & \cdot & A_{1,\mu}^\mu \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot \\ A_{\mu,1}^\mu & \cdot & \cdot & \cdot & A_{\mu,\mu}^\mu \end{bmatrix} \quad C^\mu = \begin{bmatrix} C_{1,1}^\mu & \cdot & \cdot & \cdot & C_{1,\mu}^\mu \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot \\ C_{\mu,1}^\mu & \cdot & \cdot & \cdot & C_{\mu,\mu}^\mu \end{bmatrix}. \quad (2.2.21)$$

A tale sistema è possibile applicare le equazioni del filtro di Kalman.

Si può verificare che questo sistema approssimato è affetto da rumore moltiplicativo a media nulla, cioè le sequenze $\{v_i^\mu\}$ e $\{w_i^\mu\}$ sono a media nulla.

Le sequenze $\{V^\mu\}$ e $\{W^\mu\}$ sono bianche e scorrelate, e lo stato esteso $X^\mu(k)$ è scorrelato da $W^\mu(j, \tilde{x}) \forall j$ e da $V^\mu(j, \tilde{x})$ per $k \leq j$.

I momenti $\xi_i^v(k)$, $\xi_i^w(k)$, $\zeta_i^0(k)$ con $i = 1, \dots, 2\mu$ sono necessari per il calcolo delle covarianze dei rumori estesi, Ψ^{V^μ} e Ψ^{W^μ} , le cui formule sono riportate con completezza a fine capitolo.

Infine è da notare che tale sistema può avere dimensioni notevoli all'aumentare di μ , infatti $X^\mu(k) \in \mathbb{R}^{n_\mu}$ e $Y^\mu(k) \in \mathbb{R}^{q_\mu}$, con $n_\mu = n + n^2 + \dots + n^\mu$ e $q_\mu = q + q^2 + \dots + q^\mu$.

Un modo per ovviare, almeno in parte, a tale complessità computazionale è utilizzare il formalismo delle *potenze di Kronecker ridotte*. Tale notazione si basa sulla considerazione che, osservando la definizione delle potenze di Kronecker, si nota la presenza di componenti ridondanti. In particolare se $x \in \mathbb{R}^n$, $x^{[i]} \in \mathbb{R}^{n^i}$, ma di queste n^i componenti solo $\binom{n+i-1}{i}$ sono indipendenti.

Non ci si addenterà in ulteriori particolari (sviluppati in [4]), ma tali conside-

razioni saranno tenute in conto nella parte relativa alla simulazione, dove saranno eliminate le componenti ridondanti al fine di migliorare l'efficienza dell'algoritmo.

2.3 L'algoritmo di filtraggio polinomiale

L'algoritmo di filtraggio polinomiale, i cui passi ricalcano quelli del filtro di Kalman, migliora il filtro di Kalman esteso, poichè non tiene conto del solo termine lineare dello sviluppo in serie, ma considera i termini dello sviluppo fino a un generico ordine μ . A questo fine viene sfruttata l'approssimazione di grado μ di Carleman, descritta nel paragrafo precedente. I vettori estesi di stato e di uscita sono sviluppati con termini polinomiali intorno, rispettivamente, alla stima corrente e alla predizione a un passo.

Il filtro di Kalman polinomiale esteso, ovviamente, non risulta ottimo.

FILTRO DI KALMAN POLINOMIALE ESTESO (PEKF)

(I) Condizioni iniziali

$$\hat{X}^\mu(0 | -1) = E[X^\mu(0)] = (\zeta_1^{0T} \dots \zeta_\mu^{0T})^T \quad P_p(0) = Cov(X^\mu(0)) \quad k = -1; \quad (2.3.1)$$

(II) Calcolo delle matrici che compaiono nell'approssimazione dell'equazione dell'uscita estesa

$$\bar{C}^\mu(k+1) = C^\mu(k+1, \hat{x}(k+1 | k)); \quad (2.3.2)$$

$$\bar{\Gamma}^\mu(k+1) = \Gamma^\mu(k+1, \hat{x}(k+1 | k)); \quad (2.3.3)$$

$$\bar{\Psi}^{W^\mu}(k+1) = \Psi^{W^\mu}(k+1, \hat{x}(k+1 | k)); \quad (2.3.4)$$

(III) Calcolo della predizione dell'uscita estesa

$$\hat{Y}^\mu(k+1 | k) = \bar{C}^\mu(k+1)\hat{X}^\mu(k+1 | k) + \bar{\Gamma}^\mu(k+1); \quad (2.3.5)$$

(IV) Calcolo del guadagno di Kalman

$$K(k+1) = P_p(k+1)\bar{C}^\mu(k+1)^T(\bar{C}^\mu(k+1)P_p(k+1)\bar{C}^\mu(k+1)^T + \bar{\Psi}^{W^\mu}(k+1))^{-1}; \quad (2.3.6)$$

(V) Calcolo della matrice di covarianza dell'errore di stima

$$P(k+1) = [I_{n_\mu} - K(k+1)\bar{C}^\mu(k+1)]P_p(k+1); \quad (2.3.7)$$

(VI) Calcolo della stima dello stato esteso e dello stato originario

$$\hat{X}^\mu(k+1 | k+1) = \hat{X}^\mu(k+1 | k) + K(k+1)(Y^\mu(k+1) - \hat{Y}^\mu(k+1 | k)); \quad (2.3.8)$$

$$\hat{x}(k+1 | k+1) = [I_n \ O_{n \times (n_\mu - n)}]\hat{X}^\mu(k+1 | k+1); \quad (2.3.9)$$

(VII) Incremento contatore $k = k + 1$;

(VIII) Calcolo delle matrici che compaiono nell'approssimazione dell'equazione

dello stato esteso

$$\bar{A}^\mu(k) = A^\mu(k, \hat{x}(k | k)); \quad (2.3.10)$$

$$\bar{U}^\mu(k) = \mathcal{U}^\mu(k, \hat{x}(k | k)); \quad (2.3.11)$$

$$\bar{\Psi}^{V^\mu}(k) = \Psi^{V^\mu}(k, \hat{x}(k | k)); \quad (2.3.12)$$

(IX) Calcolo della predizione dello stato esteso

$$\hat{X}^\mu(k+1 | k) = \bar{A}^\mu(k)\hat{X}^\mu(k | k) + \bar{U}^\mu(k) \quad (2.3.13)$$

(X) Calcolo della matrice di covarianza dell'errore di predizione

$$P_p(k+1) = \bar{A}^\mu(k)P(k)\bar{A}^\mu(k)^T + \bar{\Psi}^{V^\mu}(k); \quad (2.3.14)$$

(XI) Torna al passo (II).

2.4 Lemmi

In quest'ultimo paragrafo sono riportate, senza dimostrazione, le formule complete per il calcolo delle matrici A^μ e C^μ che compaiono nell'algoritmo appena descritto; sono inoltre fornite le espressioni dei drift deterministici e delle sequenze aleatorie che compaiono nelle formule (2.2.13) e (2.2.14); infine sono riportate le formule per il calcolo delle matrici di covarianza dei rumori estesi.

In questo modo si è dato un senso ad ogni espressione presente nell'algoritmo del filtro polinomiale e si può quindi procedere agevolmente all'implementazione.

Lemma 1 I generici blocchi $A_{i,j}^\mu(k, \tilde{x})$ e $C_{i,j}^\mu(k, \tilde{x})$ delle matrici $A^\mu(k, \tilde{x})$ e $C^\mu(k, \tilde{x})$ evolvono secondo le seguenti espressioni:

$$A_{i,j}^\mu(k, \tilde{x}) = \sum_{r \in \mathcal{R}_{ij}^\mu} M_r^n \bar{F}_r(k, \tilde{x}) (M_{\alpha(r)-j,j}^n \otimes \xi_{r_{\mu+1}}^v) (I_n^j \otimes (-\tilde{x})^{[\alpha(r)-j]}) \quad (2.4.1)$$

$$C_{i,j}^\mu(k, \tilde{x}) = \sum_{r \in \mathcal{R}_{ij}^\mu} M_r^q \bar{H}_r(k, \tilde{x}) (M_{\alpha(r)-j,j}^n \otimes \xi_{r_{\mu+1}}^w) (I_n^j \otimes (-\tilde{x})^{[\alpha(r)-j]}) \quad (2.4.2)$$

con $r = \{r_0, r_1, \dots, r_{\mu+1}\}$ un multiindice in $\mathbb{N}^{\mu+2}$ e con

$$\alpha(r) = \sum_{s=1}^{\mu} s r_s \quad (2.4.3)$$

$$\mathcal{R}_{ij}^{\mu} = \{r \in \mathbb{N}^{\mu+2} : |r| = i, j \leq \alpha(r) \leq \mu\} \quad (2.4.4)$$

$$\bar{F}_r(k, \tilde{x}) = \left(\prod_{s=0}^{\mu} F_{1,s}^{[r_s]}(k, \tilde{x}) \right) \otimes I_n^{r_{\mu+1}} \quad (2.4.5)$$

$$\bar{H}_r(k, \tilde{x}) = \left(\prod_{s=0}^{\mu} H_{1,s}^{[r_s]}(k, \tilde{x}) \right) \otimes I_q^{r_{\mu+1}}. \quad (2.4.6)$$

Le matrici del tipo M_j^i sono opportune matrici di commutazione per il prodotto di Kronecker e il simbolo \prod indica la *produttoria di Kronecker* (vedi Appendice A, [4], [5]).

Lemma 2 I drift deterministici $u_i^{\mu}(k, \tilde{x})$ e $\gamma_i^{\mu}(k, \tilde{x})$ hanno le seguenti espressioni:

$$u_i^{\mu}(k, \tilde{x}) = \sum_{r \in \mathcal{R}_{i0}^{\mu}} M_r^n \bar{F}_r(k, \tilde{x}) (\tilde{x}^{[\alpha(r)]} \otimes \xi_{r_{\mu+1}}^v(k)) \quad (2.4.7)$$

$$\gamma_i^{\mu}(k, \tilde{x}) = \sum_{r \in \mathcal{R}_{i0}^{\mu}} M_r^q \bar{H}_r(k, \tilde{x}) (\tilde{x}^{[\alpha(r)]} \otimes \xi_{r_{\mu+1}}^w(k)) \quad (2.4.8)$$

e le sequenze aleatorie $\{v_i^{\mu}\}$ e $\{w_i^{\mu}\}$ sono così definite:

$$v_i^{\mu} = \sum_{r \in \mathcal{R}_{i0}^{\mu}} \sum_{s=0}^{\alpha(r)} \Delta_{i,s}^r(k, \tilde{x}) \left(X_s^{\mu}(k) \otimes (v^{[r_{\mu+1}]}(k) - \xi_{r_{\mu+1}}^v(k)) \right) \quad (2.4.9)$$

$$w_i^{\mu} = \sum_{r \in \mathcal{R}_{i0}^{\mu}} \sum_{s=0}^{\alpha(r)} \Phi_{i,s}^r(k, \tilde{x}) \left(X_s^{\mu}(k) \otimes (w^{[r_{\mu+1}]}(k) - \xi_{r_{\mu+1}}^w(k)) \right) \quad (2.4.10)$$

con

$$\Delta_{i,s}^r(k, \tilde{x}) = M_r^n \bar{F}_r(k, \tilde{x}) \left(M_{\alpha(r)-s,s}^n (I_{n^s} \otimes (-\tilde{x})^{[\alpha(r)-s]}) \otimes I_{n^{r\mu+1}} \right) \quad (2.4.11)$$

$$\Phi_{i,s}^r(k, \tilde{x}) = M_r^q \bar{H}_r(k, \tilde{x}) \left(M_{\alpha(r)-s,s}^n (I_{n^s} \otimes (-\tilde{x})^{[\alpha(r)-s]}) \otimes I_{q^{r\mu+1}} \right). \quad (2.4.12)$$

Lemma 3 Siano le sequenze $\{V^\mu\}$ e $\{W^\mu\}$ bianche e siano Ψ^{V^μ} e Ψ^{W^μ} le rispettive matrici di covarianza.

I generici blocchi che le compongono avranno le seguenti espressioni (per $i, j = 1, \dots, \mu$):

$$\begin{aligned} \Psi_{i,j}^{V^\mu}(k, \tilde{x}) &= E \{v_i^\mu(k, \tilde{x})v_j^\mu(k, \tilde{x})^T\} = \sum_{r \in \mathcal{R}_{j,0}^\mu} \sum_{t \in \mathcal{R}_{i,0}^\mu} \sum_{s=0}^{\alpha(r)} \sum_{l=0}^{\alpha(t)} \Delta_{i,s}^r(k, \tilde{x}) \\ &\quad \left(\left(\Psi_{\mu s, l}^{X^\mu}(k, \tilde{x}) \otimes st_{n^i, n^j}^{-1} \left(\left(\xi_{t_{\mu+1+r_{\mu+1}}}^v(k) - \xi_{t_{\mu+1}}^v(k) \otimes \xi_{r_{\mu+1}}^v(k) \right) \right) \right) \right) \Delta_{j,l}^t(k, \tilde{x})^T \end{aligned} \quad (2.4.13)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{i,j}^{W^\mu}(k, \tilde{x}) &= E \{w_i^\mu(k, \tilde{x})w_j^\mu(k, \tilde{x})^T\} = \sum_{r \in \mathcal{R}_{j,0}^\mu} \sum_{t \in \mathcal{R}_{i,0}^\mu} \sum_{s=0}^{\alpha(r)} \sum_{l=0}^{\alpha(t)} \Phi_{i,s}^r(k, \tilde{x}) \\ &\quad \left(\left(\Psi_{\mu s, l}^{X^\mu}(k, \tilde{x}) \otimes st_{q^i, q^j}^{-1} \left(\left(\xi_{t_{\mu+1+r_{\mu+1}}}^w(k) - \xi_{t_{\mu+1}}^w(k) \otimes \xi_{r_{\mu+1}}^w(k) \right) \right) \right) \right) \Phi_{j,l}^t(k, \tilde{x})^T \end{aligned} \quad (2.4.14)$$

indicando con $\Psi_{i,j}^{X^\mu}(k, \tilde{x}) = E \{X_i^\mu(k)X_j^\mu(k)^T\}$ i blocchi della matrice dei momenti del secondo ordine dello stato esteso:

$$\Psi^{X^\mu}(k, \tilde{x}) = E \{X^\mu(k)X^\mu(k)^T\}. \quad (2.4.15)$$

L'equazione dinamica di $\Psi^{X^\mu}(k, \tilde{x})$ è la seguente:

$$\begin{aligned} \Psi^{X^\mu}(k+1, \tilde{x}) &= A^\mu(k, \tilde{x})\Psi^{X^\mu}(k, \tilde{x})A^\mu(k, \tilde{x})^T + \mathcal{U}^\mu(k, \tilde{x})\mathcal{U}^\mu(k, \tilde{x})^T + \Psi^{V^\mu}(k, \tilde{x}) + \\ &+ A^\mu(k, \tilde{x})Z^\mu(k)\mathcal{U}^\mu(k, \tilde{x})^T + \mathcal{U}^\mu(k, \tilde{x})Z^\mu(k)^T A^\mu(k, \tilde{x})^T \end{aligned} \quad (2.4.16)$$

dove $Z^\mu(k) = E\{X^\mu(k)\}$ è il valor medio dello stato esteso ed evolve così:

$$Z^\mu(k+1) = A^\mu(k, \tilde{x})Z^\mu(k) + \mathcal{U}^\mu(k, \tilde{x}). \quad (2.4.17)$$

Tali espressioni sono così inizializzate:

$$Z_i^\mu(0) = \zeta_i^0 \quad (2.4.18)$$

$$\Psi_{i,j}^{X^\mu}(0, \tilde{x}) = E\left\{x_0^{[i]}(x_0^{[j]})^T\right\}. \quad (2.4.19)$$

In precedenza si è indicato con $st^{-1}(\cdot)$ l'inverso dell'operatore di *stack* (vedi appendice A), definito, per una matrice $S = \begin{bmatrix} s_1 & \cdot & \cdot & \cdot & s_n \end{bmatrix}$, come

$$st(S) = \begin{bmatrix} s_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ s_n \end{bmatrix} \quad (2.4.20)$$

avendo indicato con $s_i, i = 1, \dots, n$, le colonne di S .

Capitolo 3

La stima simultanea di stato e parametri

La stima dei parametri di un sistema, non trattandosi di variabili aleatorie, non può essere effettuata con il criterio della minima varianza dell'errore di stima. Viene in genere utilizzato in questi casi il criterio della *massima verosimiglianza*. Per la stima dello stato viene in genere usato il filtro di Kalman, o una delle sue estensioni, viste nei capitoli precedenti.

Un algoritmo non rigoroso, ma molto usato per la stima di stato e parametri, è quello che fa uso del filtro di Kalman esteso per stimare un vettore di stato opportunamente definito, costituito dal vecchio vettore di stato più i parametri incogniti (vedi [1]).

Un miglioramento della stima può essere ottenuto utilizzando, in luogo del filtro di Kalman esteso, il filtro polinomiale descritto nel capitolo precedente. In sede di simulazione saranno valutati gli eventuali miglioramenti raggiunti grazie all'implementazione del filtro polinomiale.

La classe di sistemi oggetto di interesse sarà quella di sistemi non lineari a tempo continuo con osservazioni discrete, affetti da rumore additivo di stato e di osservazione. Questo perchè, nella maggioranza delle applicazioni, il sistema in esame sarà tempo-continuo, come tutti i sistemi fisici. In questi casi, per poter procedere all'applicazione del filtro, è necessario prima discretizzare il sistema con un passo di campionamento prefissato. Presumibilmente il comportamento del filtro sarà tanto migliore quanto minore è il passo di campionamento, cioè quanto più il sistema discretizzato si avvicina a quello tempo-continuo di partenza.

3.1 Discretizzazione per sistemi lineari a tempo continuo

Dapprima viene mostrata la discretizzazione per un generico sistema lineare stazionario con osservazioni discrete. I risultati ottenuti verranno in seguito applicati al caso non lineare.

L'espressione generica del suddetto sistema è la seguente:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + \tilde{F}n(t) \quad (3.1.1)$$

$$y(k) = Cx(kT) + Du(kT) + w(k) \quad (3.1.2)$$

facendo l'ipotesi che le osservazioni siano effettuate ad istanti di tempo equispaziati, cioè a intervalli di lunghezza T l'una dall'altra.

Si fa l'ipotesi che $n(t)$ sia un *rumore bianco gaussiano standard*, cioè che valgano le seguenti proprietà:

$$E \{n(t)\} = 0 \quad \forall t \quad (3.1.3)$$

$$E \{n(t)n^T(\tau)\} = I\delta(t - \tau) \quad \forall t, \tau \quad (3.1.4)$$

dove $\delta(\cdot)$ è la *delta di Dirac*, definita nel modo seguente:

$$\int_a^b \delta(t)dt = 1 \quad \text{se } 0 \in [a, b] \quad (3.1.5)$$

$$\int_a^b \delta(t)dt = 0 \quad \text{se } 0 \notin [a, b] . \quad (3.1.6)$$

Si noti che è gaussiana la variabile aleatoria così definita

$$v = \int_{t_1}^{t_2} f(t)n(t)dt \quad (3.1.7)$$

per qualsiasi funzione $f(t)$. Inoltre tale variabile aleatoria è a media nulla e si dimostra che la sua covarianza ha la seguente espressione:

$$\Psi_v = E \{vv^T\} = \int_{t_1}^{t_2} f(t)f^T(t)dt . \quad (3.1.8)$$

E' ora possibile procedere alla discretizzazione. A tal fine si consideri la soluzione esplicita dell'equazione differenziale di stato:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}\tilde{F}n(\tau)d\tau . \quad (3.1.9)$$

Ponendo come istante iniziale $t_0 = kT$ e come istante corrente $t = (k+1)T$, l'espressione diventa:

$$\begin{aligned} x((k+1)T) &= e^{A((k+1)T-kT)}x(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)}Bu(\tau)d\tau + \\ &+ \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)}\tilde{F}n(\tau)d\tau. \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

Definendo

$$f(\tau) = e^{A((k+1)T-\tau)} \tilde{F} \quad (3.1.11)$$

$$v(k) = \int_{kT}^{(k+1)T} f(\tau) n(\tau) d\tau \quad (3.1.12)$$

la precedente espressione si può scrivere:

$$x((k+1)T) = e^{AT} x(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)} B u(\tau) d\tau + v(k) \quad (3.1.13)$$

dove $v(k)$ può essere visto come rumore di stato (gaussiano e a media nulla).

Approssimando, infine, l'ingresso con una costante a tratti (di valore pari a quello che si ha all'inizio dell'intervallo) negli intervalli tra 2 istanti di campionamento, e definendo le matrici

$$A_d = e^{AT} \quad (3.1.14)$$

$$B_d = \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)} B d\tau = \int_0^T e^{A\theta} B d\theta \quad (3.1.15)$$

si arriva al sistema discretizzato

$$x((k+1)T) = A_d x(kT) + B_d u(kT) + v(k) \quad (3.1.16)$$

a cui è possibile applicare le equazioni del filtro di Kalman.

La covarianza del rumore di stato, secondo la formula (3.1.8), è

$$\Psi_v = \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)} \tilde{F} \tilde{F}^T e^{A^T((k+1)T-\tau)} d\tau \quad (3.1.17)$$

che, operando il cambio di variabile $\theta = (k + 1)T - \tau$, diventa più semplicemente

$$\Psi_v = \int_0^T e^{A\theta} \tilde{F} \tilde{F}^T e^{A^T \theta} d\theta. \quad (3.1.18)$$

3.2 La stima simultanea di stato e parametri (caso lineare)

Sia dato un sistema lineare a tempo discreto, che ad esempio può provenire da una discretizzazione di un sistema lineare a tempo continuo, secondo quanto visto nel paragrafo precedente.

Ipotizzando che le matrici A, B, C, D siano note a meno di un vettore θ di parametri, la sua espressione è la seguente:

$$x(k + 1) = A(\theta)x(k) + B(\theta)u(k) + FN_k \quad (3.2.1)$$

$$y(k) = C(\theta)x(k) + D(\theta)u(k) + GN_k. \quad (3.2.2)$$

La tecnica dello stato esteso fa uso di un vettore di stato così definito:

$$x_e = \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix}. \quad (3.2.3)$$

Con ipotesi di parametri costanti, si può scrivere la seguente equazione di stato per x_e :

$$\begin{aligned}
 x_e(k+1) &= \begin{bmatrix} x(k+1) \\ \theta(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\theta(k))x(k) + B(\theta(k))u(k) \\ \theta(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} N_k = \\
 &= f(x_e(k), u(k)) + F_e N_k
 \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

mentre per l'uscita, si ha:

$$y(k) = C(\theta(k))x(k) + D(\theta(k))u(k) + GN_k = h(x_e(k), u(k)) + GN_k \tag{3.2.5}$$

avendo definito le opportune funzioni non lineari $f(\cdot)$ e $h(\cdot)$ dello stato esteso e dell'ingresso.

Pertanto, includendo i parametri tra le variabili di stato, il sistema diventa, in generale, non lineare:

$$x_e(k+1) = f(x_e(k), u(k)) + F_e N_k \tag{3.2.6}$$

$$y(k) = h(x_e(k), u(k)) + GN_k \tag{3.2.7}$$

e ad esso possono quindi essere applicati stimatori come il filtro di Kalman esteso (EKF) o il filtro di Kalman polinomiale esteso (PEKF).

Le prime n componenti del vettore stimato restituiscono la stima del vettore di stato, mentre le restanti componenti costituiscono la stima dei parametri.

3.3 La stima simultanea di stato e parametri nel caso non lineare

Si consideri ora il caso più complesso di un sistema non lineare a tempo continuo con osservazioni discrete.

Supponendo che esso sia noto a meno di un vettore di parametri θ , la sua espressione è la seguente:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), \theta(t)) + Fn'(t) \quad (3.3.1)$$

$$y(kT) = h(x(kT), u(kT), \theta(kT)) + Gn''(kT) \quad (3.3.2)$$

facendo l'ipotesi di stazionarietà del sistema.

Analogamente al caso lineare, definendo lo stato esteso

$$x_e(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} \quad (3.3.3)$$

si può scrivere, per il sistema esteso:

$$\dot{x}_e(t) = f_e(x_e(t), u(t)) + F_e n'(t) \quad (3.3.4)$$

$$y(kT) = h(x_e(kT), u(kT)) + Gn''(kT) \quad (3.3.5)$$

dove si è posto

$$F_e = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} \quad f_e(x_e(t), u(t)) = \begin{bmatrix} f(x_e(t), u(t)) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.3.6)$$

ricordando che i parametri sono costanti nel tempo.

Definendo, per il nuovo sistema, i vettori estesi di stato e di uscita:

$$X^e(t) = \begin{bmatrix} x_e(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_e(t)^{[\mu]} \end{bmatrix} \quad Y(kT) = \begin{bmatrix} y(kT) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y(kT)^{[\mu]} \end{bmatrix} \quad (3.3.7)$$

e sviluppando i calcoli dell'approssimazione polinomiale di grado μ del sistema (vedi capitolo precedente), con qualche manipolazione si arriva a scrivere l'equazione dinamica dello stato esteso e l'equazione dell'uscita estesa (vedi [4]).

A questo punto si procede alla discretizzazione del sistema, in modo identico al caso lineare. Infine si applica al sistema risultante il filtro polinomiale di ordine μ , ottenendo simultaneamente la stima dello stato e dei parametri incogniti.

Anche in questo caso, come già ripetuto in relazione alle varie estensioni del filtro di Kalman, la stima ottenuta non risulta ottima.

Capitolo 4

Filtro di Kalman quadratico esteso

Nel capitolo precedente si è sviluppato, in termini generali, l'algoritmo per la stima simultanea di stato e parametri con il filtro di Kalman polinomiale esteso di un generico ordine μ . In questa sezione, il discorso viene particolarizzato al caso di *filtro quadratico*, cioè ponendo $\mu = 2$, e l'algoritmo viene quindi applicato a un esempio reale.

4.1 Formulazione del problema

L'esempio più semplice e tipico a cui si può fare riferimento è il classico sistema lineare scalare:

$$x(k+1) = \alpha x(k) + v(k) \quad (4.1.1)$$

in cui $\alpha \in \mathbb{R}$ è il parametro da stimare, x è lo stato (da stimare) e $v(k)$ è un rumore bianco gaussiano. L'equazione di uscita è:

$$y(k) = x(k) + w(k) \quad (4.1.2)$$

in cui $w(k)$ (rumore di osservazione) è un rumore bianco gaussiano indipendente dal rumore di stato $v(k)$.

Includendo il parametro tra le variabili di stato, il sistema diventa non lineare:

$$x_1(k+1) = x_1(k)x_2(k) + v(k) \quad (4.1.3)$$

$$x_2(k+1) = x_2(k) \quad (4.1.4)$$

$$y(k) = x_1(k) + w(k) \quad (4.1.5)$$

in cui si è indicato con x_1 il vecchio stato e con x_2 il parametro, costante nel tempo.

Per la stabilità asintotica del sistema, deve essere $\alpha \in (-1, 1)$.

Per essere al riparo da piccole oscillazioni del parametro, si sceglierà $\alpha \in (-0.9, 0.9)$.

Si procederà in seguito alla costruzione del filtro di Kalman esteso e del filtro polinomiale al fine di mettere in luce il miglioramento della stima che si ha utilizzando stime di ordine superiore. Il rovescio della medaglia è costituito dalla crescente complessità computazionale dell'algoritmo all'aumentare dell'ordine dello stimatore.

Riguardo alle condizioni iniziali, si considererà lo stato iniziale $x_1(0)$ gaussiano di media e varianza note e indipendente da $x_2(0)$ e dai rumori.

Verranno esaminati 2 diversi approcci per la caratterizzazione di $x_2(0)$, entrambi atti a garantire la stabilità del sistema.

Nel primo approccio, $x_2(0)$ coincide con il parametro e viene modellato come una variabile aleatoria continua uniforme su un intervallo $I = [\alpha_m, \alpha_M]$ interno all'intervallo $(-0.9, 0.9)$.

Nel secondo approccio, più complesso, il sistema non lineare viene modificato nel modo seguente:

$$x_1(k+1) = \alpha(x_2(k))x_1(k) + v(k) \quad (4.1.6)$$

$$x_2(k+1) = x_2(k) \quad (4.1.7)$$

in cui $x_2(0)$ è una variabile aleatoria gaussiana (e assume quindi valori su tutto l'asse reale), di media e varianza note, e la funzione non lineare $\alpha(\cdot)$ è definita nel modo seguente:

$$\alpha(x_2) = \frac{\alpha_m + \alpha_M}{2} + \frac{\alpha_M - \alpha_m}{2} \frac{x_2}{\sqrt{1 + x_2^2}}. \quad (4.1.8)$$

Analizzando l'andamento della funzione, si vede che essa è *monotona crescente* (con $\alpha_M > \alpha_m$) e inoltre:

$$\lim_{x_2 \rightarrow -\infty} \alpha(x_2) = \inf_{x_2 \in \mathbb{R}} \alpha(x_2) = \alpha_m \quad (4.1.9)$$

$$\lim_{x_2 \rightarrow +\infty} \alpha(x_2) = \sup_{x_2 \in \mathbb{R}} \alpha(x_2) = \alpha_M. \quad (4.1.10)$$

Si ha che $\alpha(x_2)$ assume quindi valore tra α_m e α_M .

In questo modo $\alpha(x_2)$ assume il ruolo di parametro, che può essere stimato indirettamente a partire dalla stima di x_2 .

4.2 METODO 1 (metodo uniforme)

Il sistema in esame è il seguente:

$$x_1(k+1) = x_1(k)x_2(k) + v(k) \quad (4.2.1)$$

$$x_2(k+1) = x_2(k) \quad (4.2.2)$$

$$y(k) = x_1(k) + w(k). \quad (4.2.3)$$

Per la variabile aleatoria gaussiana $x_1(0)$ sono noti a priori il valor medio $m_{x_{01}}$ e il valore quadratico medio $m_{x_{012}}$.

Per la varianza si ha:

$$\sigma_{x_{01}}^2 = E(x_1(0)^2) - E(x_1(0))^2 = m_{x_{012}} - (m_{x_{01}})^2. \quad (4.2.4)$$

Per la variabile aleatoria uniforme $x_2(0)$ è noto a priori solo il valor medio $m_{x_{02}}$:

$$E(x_2(0)) = m_{x_{02}} = \frac{\alpha_m + \alpha_M}{2}. \quad (4.2.5)$$

4.2.1 Calcolo dei momenti di ordine superiore di stato e rumori

Essendo $x_1(0)$ una variabile aleatoria gaussiana di media e varianza note, è nota la sua *densità di probabilità* ed è quindi possibile calcolare i momenti di un qualsiasi ordine.

Per la costruzione del filtro quadratico, è sufficiente conoscere i momenti fino al quarto ordine.

Si ha:

$$p_{x_1}(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{x_{01}}} e^{-\frac{(x_1 - m_{x_{01}})^2}{2(\sigma_{x_{01}})^2}} \quad (4.2.6)$$

$$E(x_1(0)^3) = m_{x_{013}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{x_{01}}} e^{-\frac{(x_1 - m_{x_{01}})^2}{2(\sigma_{x_{01}})^2}} x_1^3 dx_1 \quad (4.2.7)$$

$$E(x_1(0)^4) = m_{x_{014}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{x_{01}}} e^{-\frac{(x_1 - m_{x_{01}})^2}{2(\sigma_{x_{01}})^2}} x_1^4 dx_1 \quad (4.2.8)$$

Analogamente, essendo $x_2(0)$ una variabile aleatoria uniforme di media nota, è possibile calcolare tutti i momenti di ordine superiore a partire dalla sua densità di probabilità.

Poichè $x_2(0)$ è uniforme sull'intervallo $[\alpha_m, \alpha_M]$, la sua densità di probabilità vale

$$p_{x_2}(x_2) = \frac{1}{(\alpha_M - \alpha_m)} \chi(x_2)_{[\alpha_m, \alpha_M]} \quad (4.2.9)$$

dove $\chi(x_2)_{[\alpha_m, \alpha_M]}$ è la *funzione caratteristica* dell'intervallo $[\alpha_m, \alpha_M]$, definita nel modo seguente:

$$\chi(x_2)_{[\alpha_m, \alpha_M]} = 1 \quad x_2 \in [\alpha_m, \alpha_M] \quad (4.2.10)$$

$$\chi(x_2)_{[\alpha_m, \alpha_M]} = 0 \quad x_2 \notin [\alpha_m, \alpha_M]. \quad (4.2.11)$$

e quindi i momenti di ordine superiore si calcolano semplicemente:

$$\begin{aligned} E(x_2(0)^2) = m_{x_{022}} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\alpha_M - \alpha_m)} \chi(x_2)_{[\alpha_m, \alpha_M]} x_2^2 dx_2 = \\ &= \int_{\alpha_m}^{\alpha_M} \frac{1}{(\alpha_M - \alpha_m)} x_2^2 dx_2 = \frac{\alpha_M^3 - \alpha_m^3}{3(\alpha_M - \alpha_m)} \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

$$\begin{aligned}
E(x_2(0)^3) = m_{x_{023}} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\alpha_M - \alpha_m)} \chi(x_2)_{[\alpha_m, \alpha_M]} x_2^3 dx_2 = \\
&= \int_{\alpha_m}^{\alpha_M} \frac{1}{(\alpha_M - \alpha_m)} x_2^3 dx_2 = \frac{\alpha_M^4 - \alpha_m^4}{4(\alpha_M - \alpha_m)}
\end{aligned} \tag{4.2.13}$$

$$\begin{aligned}
E(x_2(0)^4) = m_{x_{024}} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\alpha_M - \alpha_m)} \chi(x_2)_{[\alpha_m, \alpha_M]} x_2^4 dx_2 = \\
&= \int_{\alpha_m}^{\alpha_M} \frac{1}{(\alpha_M - \alpha_m)} x_2^4 dx_2 = \frac{\alpha_M^5 - \alpha_m^5}{5(\alpha_M - \alpha_m)}.
\end{aligned} \tag{4.2.14}$$

Per la varianza si ha banalmente:

$$\sigma_{x_{02}}^2 = E(x_2(0)^2) - E(x_2(0))^2 = m_{x_{022}} - (m_{x_{02}})^2. \tag{4.2.15}$$

I rumori sono gaussiani a media nulla, quindi si ha:

$$E(v(k)) = 0 \tag{4.2.16}$$

$$E(w(k)) = 0 \tag{4.2.17}$$

$$E(v(k)^2) = \sigma_v^2 \tag{4.2.18}$$

$$E(w(k)^2) = \sigma_w^2 \tag{4.2.19}$$

indicando con σ_v^2 e σ_w^2 le varianze (note) dei rumori v e w , che coincidono con i rispettivi valori quadratici medi.

I momenti di ordine superiore necessari all'implementazione del filtro quadratico si calcolano nel modo seguente:

$$E(v(k)^3) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_v} e^{-\frac{(v-m_v)^2}{2\sigma_v^2}} v^3 dv = 0 \tag{4.2.20}$$

$$E(w(k)^3) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_w} e^{-\frac{(w-m_w)^2}{2\sigma_w^2}} w^3 dw = 0 \quad (4.2.21)$$

$$E(v(k)^4) = m_{v^4} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_v} e^{-\frac{(v-m_v)^2}{2\sigma_v^2}} v^4 dv \quad (4.2.22)$$

$$E(w(k)^4) = m_{w^4} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_w} e^{-\frac{(w-m_w)^2}{2\sigma_w^2}} w^4 dw. \quad (4.2.23)$$

4.2.2 I vettori estesi di stato e di uscita

Si definiscono i seguenti vettori estesi di stato e di uscita:

$$X_2(k) = \begin{bmatrix} [x(k)]_2 \\ [x^{[2]}(k)]_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [x_1(k)]_2 \\ [x_2(k)]_2 \\ [x_1(k)^2]_2 \\ [x_1(k)x_2(k)]_2 \\ [x_2(k)x_1(k)]_2 \\ [x_2(k)^2]_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6 \quad (4.2.24)$$

$$Y_2(k) = \begin{bmatrix} [y(k)]_2 \\ [y^2(k)]_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad (4.2.25)$$

indicando con $[\cdot]_2$ l'approssimazione di ordine 2 di un vettore (vedi appendice A, [3], [4], [10]).

Osservazione: Poichè la quarta e la quinta componente dello stato esteso sono uguali, è possibile eliminarne una e ridurre così la dimensione dello stato,

come accennato in precedenza a proposito delle *potenze di Kronecker ridotte*. In definitiva lo stato esteso che sarà considerato in seguito è il seguente:

$$X_2(k) = \begin{bmatrix} [x_1(k)]_2 \\ [x_2(k)]_2 \\ [x_1(k)^2]_2 \\ [x_1(k)x_2(k)]_2 \\ [x_2(k)^2]_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5. \quad (4.2.26)$$

4.2.3 L'approssimazione di ordine 2 del sistema

Per arrivare a scrivere l'equazione dello stato esteso e dell'uscita estesa, le singole componenti di tali vettori vengono approssimate al secondo ordine intorno, rispettivamente, alla stima corrente $\hat{x}(k | k) = \hat{x}(k)$ e alla predizione a un passo $\hat{x}(k | k - 1)$ dello stato esteso, come riportato nella sezione seguente. Pertanto è di seguito riportata l'approssimazione di ordine 2 di ogni componente dello stato esteso intorno a un generico punto \tilde{x} .

- COMPONENTI DELLO STATO ORIGINARIO

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_1(k)x_2(k) + v(k) \approx \sum_{i=0}^2 \frac{1}{i!} (\nabla_x^{[i]} \otimes (x_1x_2 + v) |_{x=\tilde{x}}) (x(k) - \tilde{x})^{[i]} = \\ &= v + \tilde{x}_1\tilde{x}_2 + \tilde{x}_2(x_1 - \tilde{x}_1) + \tilde{x}_1(x_2 - \tilde{x}_2) + (x_1 - \tilde{x}_1)(x_2 - \tilde{x}_2) = \\ &= v + x_1x_2 = x_1(k+1). \end{aligned} \quad (4.2.27)$$

Si nota quindi che l'approssimazione della prima componente dello stato coincide con la sua espressione esatta. Ciò è facilmente intuibile in quanto nell'espressione di $x_1(k+1)$ non compaiono potenze di grado superiore a 2 dello stato.

Discorso analogo vale per la seconda componente dello stato (parametro).

- ALTRE COMPONENTI DELLO STATO ESTESO

Per il quadrato della prima componente dello stato, si ha:

$$\begin{aligned}
(x_1(k+1))^2 &= (x_1(k)x_2(k) + v(k))^2 \approx \\
&\approx \sum_{i=0}^2 \frac{1}{i!} (\nabla_x^{[i]} \otimes ((x_1x_2 + v)^2) |_{x=\tilde{x}}) (x(k) - \tilde{x})^{[i]} = \\
&= (-4\tilde{x}_1\tilde{x}_2^2)x_1(k) + (-4\tilde{x}_1^2\tilde{x}_2)x_2(k) + (\tilde{x}_2^2)x_1(k)^2 + (4\tilde{x}_1\tilde{x}_2)x_1(k)x_2(k) + \\
&+ (\tilde{x}_1^2)x_2(k)^2 + (3\tilde{x}_1^2\tilde{x}_2^2) + (v(k)^2 + 2v(k)x_1(k)x_2(k)).
\end{aligned} \tag{4.2.28}$$

Per il prodotto misto, si ha:

$$\begin{aligned}
x_1(k+1)x_2(k+1) &= (x_1(k)x_2(k) + v(k))x_2(k) = vx_2 + x_1x_2^2 \approx \\
&\approx \sum_{i=0}^2 \frac{1}{i!} (\nabla_x^{[i]} \otimes (vx_2 + x_1x_2^2) |_{x=\tilde{x}}) (x(k) - \tilde{x})^{[i]} = \\
&= (-\tilde{x}_2^2)x_1(k) + (-2\tilde{x}_1\tilde{x}_2)x_2(k) + (2\tilde{x}_2)x_1(k)x_2(k) + (\tilde{x}_1)x_2(k)^2 + \\
&+ (\tilde{x}_1\tilde{x}_2^2) + (v(k)x_2(k)).
\end{aligned} \tag{4.2.29}$$

Per il quadrato della seconda componente dello stato originario si capisce che l'espressione esatta coincide con quella approssimata in quanto non sono presenti in essa termini di grado superiore al secondo.

4.2.4 Equazione dello stato esteso

Riorganizzando le espressioni appena ottenute in forma matriciale, si ottiene la seguente equazione dello stato esteso:

$$\begin{aligned}
 X_2(k+1) &= \begin{bmatrix} [x_1(k+1)]_2 \\ [x_2(k+1)]_2 \\ [x_1(k+1)^2]_2 \\ [x_1(k+1)x_2(k+1)]_2 \\ [x_2(k+1)^2]_2 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4\tilde{x}_1\tilde{x}_2^2 & -4\tilde{x}_1^2\tilde{x}_2 & \tilde{x}_2^2 & 4\tilde{x}_1\tilde{x}_2 & \tilde{x}_1^2 \\ -\tilde{x}_2^2 & -2\tilde{x}_1\tilde{x}_2 & 0 & 2\tilde{x}_2 & \tilde{x}_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_1(k)^2 \\ x_1(k)x_2(k) \\ x_2(k)^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3\tilde{x}_1^2\tilde{x}_2^2 \\ \tilde{x}_1\tilde{x}_2^2 \\ 0 \end{bmatrix} + \\
 &+ \begin{bmatrix} v(k) \\ 0 \\ v(k)^2 + 2v(k)x_1(k)x_2(k) \\ v(k)x_2(k) \\ 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{4.2.30}$$

Osservazione: In questa formulazione il rumore esteso non è a media nulla,

infatti:

$$\begin{aligned}
 E \left(\begin{bmatrix} v(k) \\ 0 \\ v(k)^2 + 2v(k)x_1(k)x_2(k) \\ v(k)x_2(k) \\ 0 \end{bmatrix} \right) &= \begin{bmatrix} E(v(k)) \\ 0 \\ E(v(k)^2) + 2E(v(k)x_1(k)x_2(k)) \\ E(v(k)x_2(k)) \\ 0 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} E(v(k)) \\ 0 \\ E(v(k)^2) + 2E(v(k))E(x_1(k)x_2(k)) \\ E(v(k))E(x_2(k)) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ E(v(k)^2) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_v^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{4.2.31}$$

Quindi, per riportarsi alla notazione vista nel capitolo 2, si pone:

$$A_2(k, \tilde{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4\tilde{x}_1\tilde{x}_2^2 & -4\tilde{x}_1^2\tilde{x}_2 & \tilde{x}_2^2 & 4\tilde{x}_1\tilde{x}_2 & \tilde{x}_1^2 \\ -\tilde{x}_2^2 & -2\tilde{x}_1\tilde{x}_2 & 0 & 2\tilde{x}_2 & \tilde{x}_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.2.32}$$

$$U_2(k, \tilde{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3\tilde{x}_1^2\tilde{x}_2^2 + \sigma_v^2 \\ \tilde{x}_1\tilde{x}_2^2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.2.33}$$

$$V_2(k, \tilde{x}) = \begin{bmatrix} v(k) \\ 0 \\ v(k)^2 + 2v(k)x_1(k)x_2(k) - \sigma_v^2 \\ v(k)x_2(k) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.2.34)$$

e si può quindi scrivere:

$$X_2(k+1) = A_2(k, \tilde{x})X_2(k) + U_2(k, \tilde{x}) + V_2(k, \tilde{x}) \quad (4.2.35)$$

in cui il rumore esteso è a media nulla.

4.2.5 Equazione dell'uscita estesa

Per l'uscita e il suo quadrato, valgono le seguenti espressioni:

$$y(k) = x_1(k) + w(k) \quad (4.2.36)$$

$$y(k)^2 = (x_1(k) + w(k))^2 = x_1(k)^2 + w(k)^2 + 2w(k)x_1(k). \quad (4.2.37)$$

Le espressioni non contengono termini di grado superiore a 2, quindi non c'è bisogno di approssimare le espressioni tramite uno sviluppo in serie.

L'equazione dell'uscita estesa si ottiene ponendo tali espressioni in forma matriciale:

$$\begin{aligned}
Y_2(k) &= \begin{bmatrix} y(k) \\ y(k)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(k) + w(k) \\ x_1(k)^2 + w(k)^2 + 2w(k)x_1(k) \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_1(k)^2 \\ x_1(k)x_2(k) \\ x_2(k)^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w(k) \\ w(k)^2 + 2w(k)x_1(k) \end{bmatrix}. \quad (4.2.38)
\end{aligned}$$

Analogamente a quanto visto per l'equazione dello stato, anche il rumore esteso di osservazione non è a media nulla:

$$\begin{aligned}
E \left(\begin{bmatrix} w(k) \\ w(k)^2 + 2w(k)x_1(k) \end{bmatrix} \right) &= \begin{bmatrix} E(w(k)) \\ E(w(k)^2 + 2w(k)x_1(k)) \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} E(w(k)) \\ E(w(k)^2) + 2E(w(k))E(x_1(k)) \end{bmatrix} \quad (4.2.39) \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ E(w(k)^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_w^2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Pertanto si pone:

$$C_2(k, \tilde{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.2.40)$$

$$\Gamma_2(k, \tilde{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_w^2 \end{bmatrix} \quad (4.2.41)$$

$$W_2(k, \tilde{x}) = \begin{bmatrix} w(k) \\ w(k)^2 + 2w(k)x_1(k) - \sigma_w^2 \end{bmatrix} \quad (4.2.42)$$

e si ottiene:

$$Y_2(k) = C_2(k, \tilde{x})X_2(k) + \Gamma_2(k, \tilde{x}) + W_2(k, \tilde{x}) \quad (4.2.43)$$

con rumore di osservazione a media nulla.

4.2.6 Calcolo delle condizioni iniziali del filtro

All'istante iniziale non sono disponibili osservazioni, pertanto la migliore predizione dello stato esteso coincide con il suo valore atteso:

$$\hat{X}(0 | -1) = E(X_2(0)) = \begin{bmatrix} E(x_1(0)) \\ E(x_2(0)) \\ E(x_1(0)^2) \\ E(x_1(0)x_2(0)) \\ E(x_2(0)^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(x_1(0)) \\ E(x_2(0)) \\ E(x_1(0)^2) \\ E(x_1(0))E(x_2(0)) \\ E(x_2(0)^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{x_{01}} \\ m_{x_{02}} \\ m_{x_{012}} \\ m_{x_{01}}m_{x_{02}} \\ m_{x_{022}} \end{bmatrix}. \quad (4.2.44)$$

La matrice di covarianza dell'errore di predizione viene inizializzata con il valore della covarianza dello stato esteso iniziale:

$$P_P(0) = Cov(X_2(0)) = E \left[(X_2(0) - E(X_2(0))) (X_2(0) - E(X_2(0)))^T \right]. \quad (4.2.45)$$

I calcoli espliciti relativi a tale matrice sono svolti in fase di implementazione del filtro (vedi Appendice B).

4.2.7 Calcolo delle covarianze dei rumori estesi

I rumori estesi di stato e di osservazione, come visto in precedenza, hanno le seguenti espressioni:

$$V_2(k, \tilde{x}) = \begin{bmatrix} v(k) \\ 0 \\ v(k)^2 + 2v(k)x_1(k)x_2(k) - \sigma_v^2 \\ v(k)x_2(k) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.2.46)$$

$$W_2(k, \tilde{x}) = \begin{bmatrix} w(k) \\ w(k)^2 + 2w(k)x_1(k) - \sigma_w^2 \end{bmatrix}. \quad (4.2.47)$$

Si noti che, a differenza dei rumori originari, i rumori estesi dipendono a ogni istante dallo stato corrente e quindi le loro caratteristiche statistiche possono variare nel tempo. Ciò significa, ad esempio, che le matrici di covarianza non sono in generale costanti ma vanno calcolate ad ogni passo.

Rinominando $x_4(k) = x_1(k)x_2(k)$ e tenendo conto che si tratta di sequenze bianche, si ha:

$$\begin{aligned} \Psi^V(k, \tilde{x}) &= E(V_2(k, \tilde{x})V_2(k, \tilde{x})^T) = \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_v^2 & 0 & 2\sigma_v^2 E(x_4(k)) & \sigma_v^2 E(x_2(k)) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\sigma_v^2 E(x_4(k)) & 0 & m_{v^4} - (\sigma_v^2)^2 + 4\sigma_v^2 E(x_4(k)^2) & 2\sigma_v^2 E(x_2(k)x_4(k)) & 0 \\ \sigma_v^2 E(x_2(k)) & 0 & 2\sigma_v^2 E(x_2(k)x_4(k)) & \sigma_v^2 E(x_2(k)^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.2.48)$$

$$\begin{aligned}
\Psi^W(k, \tilde{x}) &= E(W_2(k, \tilde{x})W_2(k, \tilde{x})^T) = \\
&= E \left(\begin{bmatrix} w(k) \\ w(k)^2 + 2w(k)x_1(k) - \sigma_w^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(k) & w(k)^2 + 2w(k)x_1(k) - \sigma_w^2 \end{bmatrix} \right) = \\
&= \begin{bmatrix} \sigma_w^2 & 2\sigma_w^2 E(x_1(k)) \\ 2\sigma_w^2 E(x_1(k)) & m_{w^4} - (\sigma_w^2)^2 + 4\sigma_w^2 E(x_1(k)^2) \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{4.2.49}$$

Si noti che in generale le covarianze dei rumori estesi, come già è stato evidenziato nella trattazione teorica del filtro polinomiale, dipendono dai momenti del secondo ordine dello stato esteso allo stesso istante. Si ricordi che la matrice dei momenti del secondo ordine dello stato esteso è calcolabile a partire da quella all'istante precedente tramite la formula ricorsiva:

$$\begin{aligned}
\Psi^X(k+1, \tilde{x}) &= A_2(k, \tilde{x})\Psi^X(k, \tilde{x})A_2(k, \tilde{x})^T + U_2(k, \tilde{x})U_2(k, \tilde{x})^T + \Psi^V(k, \tilde{x}) + \\
&\quad + A_2(k, \tilde{x})Z_2(k)U_2(k, \tilde{x})^T + U_2(k, \tilde{x})Z_2(k)^T A_2(k, \tilde{x})^T
\end{aligned} \tag{4.2.50}$$

dove $Z_2(k) = E(X_2(k))$ è il valor medio dello stato esteso, ottenibile ricorsivamente nel modo seguente:

$$Z_2(k+1) = A_2(k, \tilde{x})Z_2(k) + U_2(k, \tilde{x}). \tag{4.2.51}$$

Infine, la matrice dei momenti del secondo ordine dello stato è inizializzata nel modo seguente:

$$\begin{aligned}
E \left[X_2(0) (X_2(0))^T \right] &= E \left(\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_1(0)^2 \\ x_1(0)x_2(0) \\ x_2(0)^2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccccc} x_1(0) & x_2(0) & x_1(0)^2 & x_1(0)x_2(0) & x_2(0)^2 \end{array} \right] \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right) = \\
&= \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccccc} m_{x_{012}} & m_{x_{01}} m_{x_{02}} & m_{x_{013}} & m_{x_{012}} m_{x_{02}} & m_{x_{01}} m_{x_{022}} \\ m_{x_{01}} m_{x_{02}} & m_{x_{022}} & m_{x_{012}} m_{x_{02}} & m_{x_{01}} m_{x_{022}} & m_{x_{023}} \\ m_{x_{013}} & m_{x_{012}} m_{x_{02}} & m_{x_{014}} & m_{x_{013}} m_{x_{02}} & m_{x_{012}} m_{x_{022}} \\ m_{x_{012}} m_{x_{02}} & m_{x_{01}} m_{x_{022}} & m_{x_{013}} m_{x_{02}} & m_{x_{012}} m_{x_{022}} & m_{x_{01}} m_{x_{023}} \\ m_{x_{01}} m_{x_{022}} & m_{x_{023}} & m_{x_{012}} m_{x_{022}} & m_{x_{01}} m_{x_{023}} & m_{x_{024}} \end{array} \right] \cdot \end{array} \\
\end{array} \tag{4.2.52}$$

4.3 METODO 2 (metodo gaussiano)

Il sistema in esame è il seguente:

$$x_1(k+1) = \alpha(x_2(k))x_1(k) + v(k) \tag{4.3.1}$$

$$x_2(k+1) = x_2(k) \tag{4.3.2}$$

$$y(k) = x_1(k) + w(k) \tag{4.3.3}$$

con

$$\alpha(x_2(k)) = \frac{\alpha_m + \alpha_M}{2} + \frac{\alpha_M - \alpha_m}{2} \frac{x_2(k)}{\sqrt{1 + x_2(k)^2}}. \tag{4.3.4}$$

Per la prima componente dello stato valgono le ipotesi fatte nella sezione precedente:

$$E(x_1(0)) = m_{x_{01}} \quad (4.3.5)$$

$$E(x_1(0)^2) = m_{x_{012}} \Rightarrow \sigma_{x_{01}}^2 = E(x_1(0)^2) - E(x_1(0))^2 = m_{x_{012}} - (m_{x_{01}})^2 \quad (4.3.6)$$

$$E(x_1(0)^3) = m_{x_{013}} \quad (4.3.7)$$

$$E(x_1(0)^4) = m_{x_{014}}. \quad (4.3.8)$$

Analogo discorso vale per i rumori:

$$E(v(k)) = m_v = 0 \quad (4.3.9)$$

$$E(w(k)) = m_w = 0 \quad (4.3.10)$$

$$E(v(k)^2) = \sigma_v^2 \quad (4.3.11)$$

$$E(w(k)^2) = \sigma_w^2 \quad (4.3.12)$$

$$E(v(k)^3) = 0 \quad (4.3.13)$$

$$E(w(k)^3) = 0 \quad (4.3.14)$$

$$E(v(k)^4) = m_{v^4} \quad (4.3.15)$$

$$E(w(k)^4) = m_{w^4}. \quad (4.3.16)$$

A differenza del metodo visto in precedenza, nel secondo approccio anche la seconda componente dello stato $x_2(0)$ è una variabile aleatoria gaussiana, di media e varianza note, indipendente da $x_1(0)$. Si ricordi che con queste ipotesi x_2 non coincide con il parametro α definito originariamente, ma è legato ad essa dalla relazione $\alpha = \alpha(x_2)$ vista precedentemente.

Per $x_2(0)$ si pone:

$$E(x_2(0)) = m_{x_{02}} \quad (4.3.17)$$

$$E(x_2(0)^2) = m_{x_{022}} \quad (4.3.18)$$

$$\sigma_{x_{02}}^2 = E(x_2(0)^2) - (E(x_2(0)))^2 = m_{x_{022}} - (m_{x_{02}})^2 \quad (4.3.19)$$

e quindi si ha:

$$p_{x_2}(x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{x_{02}}} e^{-\frac{(x_2 - m_{x_{02}})^2}{2(\sigma_{x_{02}})^2}} \quad (4.3.20)$$

$$E(x_2(0)^3) = m_{x_{023}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{x_{02}}} e^{-\frac{(x_2 - m_{x_{02}})^2}{2(\sigma_{x_{02}})^2}} x_2^3 dx_2 \quad (4.3.21)$$

$$E(x_2(0)^4) = m_{x_{024}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{x_{02}}} e^{-\frac{(x_2 - m_{x_{02}})^2}{2(\sigma_{x_{02}})^2}} x_2^4 dx_2. \quad (4.3.22)$$

I vettori estesi di stato e di uscita sono definiti in modo identico a quanto visto nel metodo 1.

4.3.1 L'approssimazione di ordine 2 del sistema

- COMPONENTI DELLO STATO ORIGINARIO

Per semplificare i calcoli, si pone:

$$a = \frac{\alpha_m + \alpha_M}{2} \quad (4.3.23)$$

$$b = \frac{\alpha_M - \alpha_m}{2}. \quad (4.3.24)$$

Per la prima componente dello stato originario, si ha quindi :

$$\begin{aligned}
x_1(k+1) &= \left(a + b \frac{x_2(k)}{\sqrt{1+x_2(k)^2}} \right) x_1(k) + v(k) \approx \\
&\approx \sum_{i=0}^2 \frac{1}{i!} \left(\nabla_x^{[i]} \otimes \left(\left(a + b \frac{x_2}{\sqrt{1+x_2^2}} \right) x_1 + v \right) \Big|_{x=\tilde{x}} \right) (x(k) - \tilde{x})^{[i]} = \\
&= a_{11}(\tilde{x})x_1(k) + a_{12}(\tilde{x})x_2(k) + a_{13}(\tilde{x})x_1(k)^2 + a_{14}(\tilde{x})x_1(k)x_2(k) + \\
&+ a_{15}(\tilde{x})x_2(k)^2 + \gamma_1(\tilde{x}) + v(k).
\end{aligned} \tag{4.3.25}$$

con

$$a_{11}(\tilde{x}) = a + \frac{b\tilde{x}_2^3}{(\tilde{x}_2^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \tag{4.3.26}$$

$$a_{12}(\tilde{x}) = \frac{3b\tilde{x}_1\tilde{x}_2^2}{(\tilde{x}_2^2 + 1)^{\frac{5}{2}}} \tag{4.3.27}$$

$$a_{13}(\tilde{x}) = 0 \tag{4.3.28}$$

$$a_{14}(\tilde{x}) = \frac{b}{(\tilde{x}_2^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \tag{4.3.29}$$

$$a_{15}(\tilde{x}) = -\frac{\frac{3}{2}b\tilde{x}_1\tilde{x}_2}{(\tilde{x}_2^2 + 1)^{\frac{5}{2}}} \tag{4.3.30}$$

$$\gamma_1(\tilde{x}) = -\frac{\frac{3}{2}b\tilde{x}_1\tilde{x}_2^3}{(\tilde{x}_2^2 + 1)^{\frac{5}{2}}}. \tag{4.3.31}$$

La seconda componente dello stato non va approssimata (vedi paragrafo precedente).

- ALTRE COMPONENTI DELLO STATO ESTESO

Per il quadrato della prima componente dello stato, l'approssimazione di ordine 2 è la seguente:

$$\begin{aligned}
(x_1(k+1))^2 &= (a(x_2(k))x_1(k) + v(k))^2 = \left(\left(a + b \frac{x_2(k)}{\sqrt{1+x_2(k)^2}} \right) x_1(k) + v(k) \right)^2 \approx \\
&\approx \sum_{i=0}^2 \frac{1}{i!} \left(\nabla_x^{[i]} \otimes \left(\left(\left(a + b \frac{x_2}{\sqrt{1+x_2^2}} \right) x_1 + v \right) \Big|_{x=\tilde{x}} \right)^2 \right) (x(k) - \tilde{x})^{[i]} = \\
&= a_{31}(\tilde{x})x_1(k) + a_{32}(\tilde{x})x_2(k) + a_{33}(\tilde{x})x_1(k)^2 + a_{34}(\tilde{x})x_1(k)x_2(k) + \\
&+ a_{35}(\tilde{x})x_2(k)^2 + \gamma_3(\tilde{x}) + v_3(k).
\end{aligned} \tag{4.3.32}$$

con

$$a_{31}(\tilde{x}) = \left(a + \frac{b\tilde{x}_2}{\sqrt{\tilde{x}_2^2 + 1}} \right) \left(-\frac{4b\tilde{x}_1\tilde{x}_2}{(\tilde{x}_2^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \right) \tag{4.3.33}$$

$$a_{32}(\tilde{x}) = \left(a + \frac{b\tilde{x}_2}{\sqrt{\tilde{x}_2^2 + 1}} \right) \left(\frac{2(2\tilde{x}_2^2 - 1)b\tilde{x}_1^2}{(\tilde{x}_2^2 + 1)^{\frac{5}{2}}} \right) - \frac{2b^2\tilde{x}_1^2\tilde{x}_2}{(\tilde{x}_2^2 + 1)^3} \tag{4.3.34}$$

$$a_{33}(\tilde{x}) = \left(a + \frac{b\tilde{x}_2}{\sqrt{\tilde{x}_2^2 + 1}} \right)^2 \tag{4.3.35}$$

$$a_{34}(\tilde{x}) = \left(a + \frac{b\tilde{x}_2}{\sqrt{\tilde{x}_2^2 + 1}} \right) \left(\frac{4b\tilde{x}_1}{(\tilde{x}_2^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \right) \tag{4.3.36}$$

$$a_{35}(\tilde{x}) = \left(a + \frac{b\tilde{x}_2}{\sqrt{\tilde{x}_2^2 + 1}} \right) \left(-\frac{3b\tilde{x}_1^2\tilde{x}_2}{(\tilde{x}_2^2 + 1)^{\frac{5}{2}}} \right) + \frac{b^2\tilde{x}_1^2}{(\tilde{x}_2^2 + 1)^3} \tag{4.3.37}$$

$$\gamma_3(\tilde{x}) = \left(a + \frac{b\tilde{x}_2}{\sqrt{\tilde{x}_2^2 + 1}} \right) \left(\frac{(2 - \tilde{x}_2^2) b\tilde{x}_1^2\tilde{x}_2}{(\tilde{x}_2^2 + 1)^{\frac{5}{2}}} \right) + \frac{b^2\tilde{x}_1^2\tilde{x}_2^2}{(\tilde{x}_2^2 + 1)^3} + \sigma_v^2 \quad (4.3.38)$$

$$\begin{aligned} v_3(k) = & v(k)^2 - \left(\frac{3b\tilde{x}_1\tilde{x}_2^3}{(\tilde{x}_2^2 + 1)^{\frac{5}{2}}} \right) v(k) + \left(2a + \frac{2b\tilde{x}_2^3}{(\tilde{x}_2^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \right) v(k)x_1(k) + \\ & + \left(\frac{6b\tilde{x}_1\tilde{x}_2^2}{(\tilde{x}_2^2 + 1)^{\frac{5}{2}}} \right) v(k)x_2(k) + \left(\frac{2b}{(\tilde{x}_2^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \right) v(k)x_1(k)x_2(k) + \quad (4.3.39) \\ & - \left(\frac{3b\tilde{x}_1\tilde{x}_2}{(\tilde{x}_2^2 + 1)^{\frac{5}{2}}} \right) v(k)x_2(k)^2 - \sigma_v^2. \end{aligned}$$

Per il prodotto misto, lo sviluppo al secondo ordine è invece il seguente:

$$\begin{aligned} x_1(k+1)x_2(k+1) &= (a(x_2(k))x_1(k) + v(k))x_2(k) = \\ &= \left(\left(a + b \frac{x_2(k)}{\sqrt{1+x_2(k)^2}} \right) x_1(k) + v(k) \right) x_2(k) \approx \\ &\approx \sum_{i=0}^2 \frac{1}{i!} \left(\nabla_x^{[i]} \otimes \left(\left(\left(a + b \frac{x_2}{\sqrt{1+x_2^2}} \right) x_1 + v \right) x_2 \right) \Big|_{x=\tilde{x}} \right) (x(k) - \tilde{x})^{[i]} \\ &= a_{41}(\tilde{x})x_1(k) + a_{42}(\tilde{x})x_2(k) + a_{43}(\tilde{x})x_1(k)^2 + a_{44}(\tilde{x})x_1(k)x_2(k) + \\ &+ a_{45}(\tilde{x})x_2(k)^2 + \gamma_4(\tilde{x}) + v(k)x_2(k). \end{aligned} \quad (4.3.40)$$

con

$$a_{41}(\tilde{x}) = -\frac{b\tilde{x}_2^2}{(\tilde{x}_2^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \quad (4.3.41)$$

$$a_{42}(\tilde{x}) = \frac{(\tilde{x}_2^2 - 2) b\tilde{x}_1\tilde{x}_2}{(\tilde{x}_2^2 + 1)^{\frac{5}{2}}} \quad (4.3.42)$$

$$a_{43}(\tilde{x}) = 0 \quad (4.3.43)$$

$$a_{44}(\tilde{x}) = a + \frac{2b\tilde{x}_2}{\sqrt{\tilde{x}_2^2 + 1}} - \frac{b\tilde{x}_2^3}{(\tilde{x}_2^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \quad (4.3.44)$$

$$a_{45}(\tilde{x}) = -\frac{\frac{1}{2}(\tilde{x}_2^2 - 2)b\tilde{x}_1}{(\tilde{x}_2^2 + 1)^{\frac{5}{2}}} \quad (4.3.45)$$

$$\gamma_4(\tilde{x}) = -\frac{\frac{1}{2}(\tilde{x}_2^2 - 2)b\tilde{x}_1\tilde{x}_2^2}{(\tilde{x}_2^2 + 1)^{\frac{5}{2}}}. \quad (4.3.46)$$

Per il quadrato della seconda componente dello stato, come già ripetuto, non è necessario procedere all'approssimazione.

4.3.2 Equazione dello stato esteso

In base ai calcoli precedentemente svolti si può scrivere l'equazione dello stato esteso:

$$\begin{aligned}
 X_2(k+1) &= \begin{bmatrix} [x_1(k+1)]_2 \\ [x_2(k+1)]_2 \\ [x_1(k+1)^2]_2 \\ [x_1(k+1)x_2(k+1)]_2 \\ [x_2(k+1)^2]_2 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} a_{11}(\tilde{x}) & a_{12}(\tilde{x}) & a_{13}(\tilde{x}) & a_{14}(\tilde{x}) & a_{15}(\tilde{x}) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{31}(\tilde{x}) & a_{32}(\tilde{x}) & a_{33}(\tilde{x}) & a_{34}(\tilde{x}) & a_{35}(\tilde{x}) \\ a_{41}(\tilde{x}) & a_{42}(\tilde{x}) & a_{43}(\tilde{x}) & a_{44}(\tilde{x}) & a_{45}(\tilde{x}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_1(k)^2 \\ x_1(k)x_2(k) \\ x_2(k)^2 \end{bmatrix} + \\
 &+ \begin{bmatrix} \gamma_1(\tilde{x}) \\ 0 \\ \gamma_3(\tilde{x}) \\ \gamma_4(\tilde{x}) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v(k) \\ 0 \\ v_3(k) \\ v(k)x_2(k) \\ 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

(4.3.47)

Definendo

$$A_2(k, \tilde{x}) = \begin{bmatrix} a_{11}(\tilde{x}) & a_{12}(\tilde{x}) & 0 & a_{14}(\tilde{x}) & a_{15}(\tilde{x}) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{31}(\tilde{x}) & a_{32}(\tilde{x}) & a_{33}(\tilde{x}) & a_{34}(\tilde{x}) & a_{35}(\tilde{x}) \\ a_{41}(\tilde{x}) & a_{42}(\tilde{x}) & 0 & a_{44}(\tilde{x}) & a_{45}(\tilde{x}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.3.48)$$

$$U_2(k, \tilde{x}) = \begin{bmatrix} \gamma_1(\tilde{x}) \\ 0 \\ \gamma_3(\tilde{x}) \\ \gamma_4(\tilde{x}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.3.49)$$

$$V_2(k, \tilde{x}) = \begin{bmatrix} v(k) \\ 0 \\ v_3(k) \\ v(k)x_2(k) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.3.50)$$

si arriva quindi alla forma canonica:

$$X_2(k+1) = A_2(k, \tilde{x})X_2(k) + U_2(k, \tilde{x}) + V_2(k, \tilde{x}). \quad (4.3.51)$$

4.3.3 Equazione dell'uscita estesa

L'equazione dell'uscita estesa rimane inalterata rispetto al primo metodo:

$$\begin{aligned}
Y_2(k) &= \begin{bmatrix} y(k) \\ y(k)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(k) + w(k) \\ x_1(k)^2 + w(k)^2 + 2w(k)x_1(k) \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_1(k)^2 \\ x_1(k)x_2(k) \\ x_2(k)^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w(k) \\ w(k)^2 + 2w(k)x_1(k) \end{bmatrix}. \quad (4.3.52)
\end{aligned}$$

Ponendo:

$$C_2(k, \tilde{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.3.53)$$

$$\Gamma_2(k, \tilde{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_w^2 \end{bmatrix} \quad (4.3.54)$$

$$W_2(k, \tilde{x}) = \begin{bmatrix} w(k) \\ w(k)^2 + 2w(k)x_1(k) - \sigma_w^2 \end{bmatrix} \quad (4.3.55)$$

si ottiene:

$$Y_2(k) = C_2(k, \tilde{x})X_2(k) + \Gamma_2(k, \tilde{x}) + W_2(k, \tilde{x}) \quad (4.3.56)$$

con rumore di osservazione a media nulla.

4.3.4 Calcolo delle condizioni iniziali del filtro

All'istante iniziale non sono disponibili osservazioni, pertanto la migliore predizione dello stato esteso coincide con il suo valore atteso:

$$\hat{X}(0 | -1) = E(X_2(0)) = \begin{bmatrix} E(x_1(0)) \\ E(x_2(0)) \\ E(x_1(0)^2) \\ E(x_1(0)x_2(0)) \\ E(x_2(0)^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(x_1(0)) \\ E(x_2(0)) \\ E(x_1(0)^2) \\ E(x_1(0))E(x_2(0)) \\ E(x_2(0)^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{x_{01}} \\ m_{x_{02}} \\ m_{x_{012}} \\ m_{x_{01}}m_{x_{02}} \\ m_{x_{022}} \end{bmatrix}. \quad (4.3.57)$$

La matrice di covarianza dell'errore di predizione viene inizializzata con il valore della covarianza dello stato esteso iniziale:

$$P_P(0) = Cov(X_2(0)) = E \left[(X_2(0) - E(X_2(0))) (X_2(0) - E(X_2(0)))^T \right]. \quad (4.3.58)$$

I calcoli espliciti relativi a tale matrice sono svolti in fase di implementazione del filtro (vedi Appendice B).

4.3.5 Calcolo delle covarianze dei rumori estesi

I rumori estesi di stato e di osservazione, come visto in precedenza, hanno le seguenti espressioni:

$$V_2(k, \tilde{x}) = \begin{bmatrix} v(k) \\ 0 \\ v_3(k) \\ v(k)x_2(k) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.3.59)$$

$$W_2(k, \tilde{x}) = \begin{bmatrix} w(k) \\ w(k)^2 + 2w(k)x_1(k) - \sigma_w^2 \end{bmatrix} \quad (4.3.60)$$

e per esse valgono le stesse considerazioni fatte durante lo sviluppo del metodo uniforme.

Per la matrice di covarianza del rumore esteso di stato si ha la seguente espressione:

$$\begin{aligned} \Psi^V(k, \tilde{x}) &= E(V_2(k, \tilde{x})V_2(k, \tilde{x})^T) = E \left(\begin{bmatrix} v(k) \\ 0 \\ v_3(k) \\ v(k)x_2(k) \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(k) & 0 & v_3(k) & v(k)x_2(k) & 0 \end{bmatrix} \right) = \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_v^2 & 0 & E(v(k)v_3(k)) & \sigma_v^2 E(x_2(k)) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E(v(k)v_3(k)) & 0 & E(v_3(k)^2) & E(v(k)v_3(k)x_2(k)) & 0 \\ \sigma_v^2 E(x_2(k)) & 0 & E(v(k)v_3(k)x_2(k)) & \sigma_v^2 E(x_2(k)^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.3.61)$$

Al fine di non creare ambiguità, si rinominano le seguenti componenti dello stato esteso:

$$x_3(k) = x_1(k)^2 \quad (4.3.62)$$

$$x_4(k) = x_1(k)x_2(k) \quad (4.3.63)$$

$$x_5(k) = x_2(k)^2. \quad (4.3.64)$$

In questo modo si ha:

$$v_3(k) = v(k)^2 - \sigma_v^2 + v(k)n(k) \quad (4.3.65)$$

con

$$\begin{aligned} n(k) = & \left(2a + \frac{2b\tilde{x}_2^3}{(\tilde{x}_2^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \right) x_1(k) + \left(\frac{6b\tilde{x}_1\tilde{x}_2^2}{(\tilde{x}_2^2 + 1)^{\frac{5}{2}}} \right) x_2(k) + \left(\frac{2b}{(\tilde{x}_2^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \right) x_4(k) + \\ & - \left(\frac{3b\tilde{x}_1\tilde{x}_2}{(\tilde{x}_2^2 + 1)^{\frac{5}{2}}} \right) x_5(k) - \left(\frac{3b\tilde{x}_1\tilde{x}_2^3}{(\tilde{x}_2^2 + 1)^{\frac{5}{2}}} \right) \end{aligned} \quad (4.3.66)$$

e quindi per le rimanenti espressioni rimaste irrisolte nella $\Psi^V(k, \tilde{x})$, si ha:

$$\begin{aligned} E(n(k)) = & \left(2a + \frac{2b\tilde{x}_2^3}{(\tilde{x}_2^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \right) E(x_1(k)) + \left(\frac{6b\tilde{x}_1\tilde{x}_2^2}{(\tilde{x}_2^2 + 1)^{\frac{5}{2}}} \right) E(x_2(k)) + \\ & + \left(\frac{2b}{(\tilde{x}_2^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \right) E(x_4(k)) - \left(\frac{3b\tilde{x}_1\tilde{x}_2}{(\tilde{x}_2^2 + 1)^{\frac{5}{2}}} \right) E(x_5(k)) - \left(\frac{3b\tilde{x}_1\tilde{x}_2^3}{(\tilde{x}_2^2 + 1)^{\frac{5}{2}}} \right). \end{aligned} \quad (4.3.67)$$

$$E(v(k)v_3(k)) = E(v(k)^3 - v(k)\sigma_v^2 + v(k)^2n(k)) = E(v(k))^2 E(n(k)) = \sigma_v^2 E(n(k)). \quad (4.3.68)$$

$$\begin{aligned}
E(n(k)^2) &= E \left(\left(\left(2a + \frac{2b\tilde{x}_2^3}{(\tilde{x}_2^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \right) x_1(k) + \left(\frac{6b\tilde{x}_1\tilde{x}_2^2}{(\tilde{x}_2^2 + 1)^{\frac{5}{2}}} \right) x_2(k) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(\frac{2b}{(\tilde{x}_2^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \right) x_4(k) - \left(\frac{3b\tilde{x}_1\tilde{x}_2}{(\tilde{x}_2^2 + 1)^{\frac{5}{2}}} \right) x_5(k) - \left(\frac{3b\tilde{x}_1\tilde{x}_2^3}{(\tilde{x}_2^2 + 1)^{\frac{5}{2}}} \right)^2 \right) = \\
&= \left(a + \frac{b\tilde{x}_2^3}{(\tilde{x}_2^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \right) \left(-\frac{12b\tilde{x}_1\tilde{x}_2^3}{(\tilde{x}_2^2 + 1)^{\frac{5}{2}}} \right) E(x_1(k)) + \left(-\frac{36b^2\tilde{x}_1^2\tilde{x}_2^5}{(\tilde{x}_2^2 + 1)^5} \right) E(x_2(k)) + \\
&\quad + \left(-\frac{12b^2\tilde{x}_1\tilde{x}_2^3}{(\tilde{x}_2^2 + 1)^4} \right) E(x_4(k)) + \left(\frac{18b^2\tilde{x}_1^2\tilde{x}_2^4}{(\tilde{x}_2^2 + 1)^5} \right) E(x_5(k)) + \\
&\quad + \left(4a^2 + \frac{8ab\tilde{x}_2^3}{(\tilde{x}_2^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} + \frac{4b^2\tilde{x}_2^6}{(\tilde{x}_2^2 + 1)^3} \right) E(x_1(k)^2) + \\
&\quad + \left(a + \frac{b\tilde{x}_2^3}{(\tilde{x}_2^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \right) \left(\frac{24b\tilde{x}_1\tilde{x}_2^2}{(\tilde{x}_2^2 + 1)^{\frac{5}{2}}} \right) E(x_1(k)x_2(k)) + \\
&\quad + \left(a + \frac{b\tilde{x}_2^3}{(\tilde{x}_2^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \right) \left(\frac{8b}{(\tilde{x}_2^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \right) E(x_1(k)x_4(k)) + \\
&\quad + \left(a + \frac{b\tilde{x}_2^3}{(\tilde{x}_2^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \right) \left(-\frac{12b\tilde{x}_1\tilde{x}_2}{(\tilde{x}_2^2 + 1)^{\frac{5}{2}}} \right) E(x_1(k)x_5(k)) + \\
&\quad + \left(\frac{36b^2\tilde{x}_1^2\tilde{x}_2^4}{(\tilde{x}_2^2 + 1)^5} \right) E(x_2(k)^2) + \left(\frac{24b^2\tilde{x}_1\tilde{x}_2^2}{(\tilde{x}_2^2 + 1)^4} \right) E(x_2(k)x_4(k)) + \\
&\quad + \left(-\frac{36b^2\tilde{x}_1^2\tilde{x}_2^3}{(\tilde{x}_2^2 + 1)^5} \right) E(x_2(k)x_5(k)) + \left(\frac{4b^2}{(\tilde{x}_2^2 + 1)^3} \right) E(x_4(k)^2) + \\
&\quad + \left(-\frac{12b^2\tilde{x}_1\tilde{x}_2}{(\tilde{x}_2^2 + 1)^4} \right) E(x_4(k)x_5(k)) + \left(\frac{9b^2\tilde{x}_1^2\tilde{x}_2^2}{(\tilde{x}_2^2 + 1)^5} \right) E(x_5(k)^2) + \\
&\quad + \left(\frac{9b^2\tilde{x}_1^2\tilde{x}_2^6}{(\tilde{x}_2^2 + 1)^5} \right).
\end{aligned}$$

(4.3.69)

$$\begin{aligned}
E(v_3(k)^2) &= E((v(k)^2 - \sigma_v^2 + v(k)n(k))^2) = \\
&= E(v(k)^4 + 2n(k)v(k)^3 + \sigma_v^4 - 2n(k)v(k)\sigma_v^2 + n(k)^2v(k)^2 - 2v(k)^2\sigma_v^2) = \\
&= (m_{v^4}) - (\sigma_v^2)^2 + \sigma_v^2 E(n(k)^2).
\end{aligned} \tag{4.3.70}$$

$$\begin{aligned}
E(n(k)x_2(k)) &= \left(2a + \frac{2b\tilde{x}_2^3}{(\tilde{x}_2^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}\right) E(x_1(k)x_2(k)) + \left(\frac{6b\tilde{x}_1\tilde{x}_2^2}{(\tilde{x}_2^2 + 1)^{\frac{5}{2}}}\right) E(x_2(k)^2) + \\
&+ \left(\frac{2b}{(\tilde{x}_2^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}\right) E(x_2(k)x_4(k)) - \left(\frac{3b\tilde{x}_1\tilde{x}_2}{(\tilde{x}_2^2 + 1)^{\frac{5}{2}}}\right) E(x_2(k)x_5(k)) + \\
&- \left(\frac{3b\tilde{x}_1\tilde{x}_2^3}{(\tilde{x}_2^2 + 1)^{\frac{5}{2}}}\right) E(x_2(k)).
\end{aligned} \tag{4.3.71}$$

$$\begin{aligned}
E(v(k)v_3(k)x_2(k)) &= E(v(k)v_3(k)x_2(k)) = \\
&= E(v(k)x_2(k)(v(k)^2 - \sigma_v^2 + v(k)n(k))) = \sigma_v^2 E(n(k)x_2(k)).
\end{aligned} \tag{4.3.72}$$

La matrice di covarianza per il rumore esteso di osservazione ha la stessa espressione già trovata in precedenza:

$$\begin{aligned}
\Psi^W(k, \tilde{x}) &= E(W_2(k, \tilde{x})W_2(k, \tilde{x})^T) = \\
&= \begin{bmatrix} \sigma_w^2 & 2\sigma_w^2 E(x_1(k)) \\ 2\sigma_w^2 E(x_1(k)) & (m_{w^4}) - (\sigma_w^2)^2 + 4\sigma_w^2 E(x_1(k)^2) \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{4.3.73}$$

Anche in questo caso, ovviamente, le covarianze dei rumori estesi dipendono dai momenti del secondo ordine dello stato esteso allo stesso istante. L'evoluzione

di tali momenti, a sua volta, dipende dal valor medio dello stato esteso. Le formule ricorsive che descrivono l'evoluzione di tali grandezze sono le stesse già viste per il metodo uniforme:

$$\begin{aligned} \Psi^X(k+1, \tilde{x}) &= A_2(k, \tilde{x})\Psi^X(k, \tilde{x})A_2(k, \tilde{x})^T + U_2(k, \tilde{x})U_2(k, \tilde{x})^T + \Psi^V(k, \tilde{x}) + \\ &+ A_2(k, \tilde{x})Z_2(k)U_2(k, \tilde{x})^T + U_2(k, \tilde{x})Z_2(k)^T A_2(k, \tilde{x})^T. \end{aligned} \quad (4.3.74)$$

$$Z_2(k+1) = A_2(k, \tilde{x})Z_2(k) + U_2(k, \tilde{x}). \quad (4.3.75)$$

Anche la matrice dei momenti del secondo ordine dello stato, infine, è inizializzata allo stesso modo:

$$\begin{aligned} E \left[X_2(0) (X_2(0))^T \right] &= E \left(\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_1(0)^2 \\ x_1(0)x_2(0) \\ x_2(0)^2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccccc} x_1(0) & x_2(0) & x_1(0)^2 & x_1(0)x_2(0) & x_2(0)^2 \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{ccccc} m_{x_{012}} & m_{x_{01}}m_{x_{02}} & m_{x_{013}} & m_{x_{012}}m_{x_{02}} & m_{x_{01}}m_{x_{022}} \\ m_{x_{01}}m_{x_{02}} & m_{x_{022}} & m_{x_{012}}m_{x_{02}} & m_{x_{01}}m_{x_{022}} & m_{x_{023}} \\ m_{x_{013}} & m_{x_{012}}m_{x_{02}} & m_{x_{014}} & m_{x_{013}}m_{x_{02}} & m_{x_{012}}m_{x_{022}} \\ m_{x_{012}}m_{x_{02}} & m_{x_{01}}m_{x_{022}} & m_{x_{013}}m_{x_{02}} & m_{x_{012}}m_{x_{022}} & m_{x_{01}}m_{x_{023}} \\ m_{x_{01}}m_{x_{022}} & m_{x_{023}} & m_{x_{012}}m_{x_{022}} & m_{x_{01}}m_{x_{023}} & m_{x_{024}} \end{array} \right] \end{array} \right) = \\ &= \left[\begin{array}{ccccc} m_{x_{012}} & m_{x_{01}}m_{x_{02}} & m_{x_{013}} & m_{x_{012}}m_{x_{02}} & m_{x_{01}}m_{x_{022}} \\ m_{x_{01}}m_{x_{02}} & m_{x_{022}} & m_{x_{012}}m_{x_{02}} & m_{x_{01}}m_{x_{022}} & m_{x_{023}} \\ m_{x_{013}} & m_{x_{012}}m_{x_{02}} & m_{x_{014}} & m_{x_{013}}m_{x_{02}} & m_{x_{012}}m_{x_{022}} \\ m_{x_{012}}m_{x_{02}} & m_{x_{01}}m_{x_{022}} & m_{x_{013}}m_{x_{02}} & m_{x_{012}}m_{x_{022}} & m_{x_{01}}m_{x_{023}} \\ m_{x_{01}}m_{x_{022}} & m_{x_{023}} & m_{x_{012}}m_{x_{022}} & m_{x_{01}}m_{x_{023}} & m_{x_{024}} \end{array} \right]. \end{aligned} \quad (4.3.76)$$

Capitolo 5

Filtro di Kalman cubico esteso

Un'ulteriore evoluzione del filtro quadratico presentato nel capitolo precedente è costituito dal filtro di Kalman polinomiale esteso di ordine 3, che verrà presentato, per semplicità, solo in relazione al cosiddetto metodo uniforme per la stima del parametro.

5.1 Formulazione del problema e calcolo dei momenti

L'esempio trattato è ancora il classico sistema lineare scalare:

$$x(k+1) = \alpha x(k) + v(k) \quad (5.1.1)$$

$$y(k) = x(k) + w(k) \quad (5.1.2)$$

in cui $\alpha \in \mathbb{R}$ è il parametro da stimare, x è lo stato (da stimare), y è l'uscita e $v(k)$ e $w(k)$ sono rispettivamente il rumore di stato e di osservazione.

Considerando valide tutte le considerazioni e ipotesi già viste nel paragrafo 4.1, si arriva al sistema non lineare

$$x_1(k+1) = x_1(k)x_2(k) + v(k) \quad (5.1.3)$$

$$x_2(k+1) = x_2(k) \quad (5.1.4)$$

$$y(k) = x_1(k) + w(k) \quad (5.1.5)$$

in cui si è indicato con x_1 il vecchio stato e con x_2 il parametro, costante nel tempo.

Si sceglierà $\alpha \in (-0.9, 0.9)$, in base alle considerazioni già viste.

Nell'approccio che vedremo, $x_2(0)$ viene modellato come una variabile aleatoria continua uniforme su un intervallo $I = [\alpha_m, \alpha_M]$ interno all'intervallo $(-0.9, 0.9)$, mentre $x_1(0)$ è una variabile aleatoria gaussiana di media e varianza note.

Si possono quindi sfruttare i calcoli già svolti nel capitolo precedente per il calcolo dei momenti fino all'ordine 4, ma in più sarà necessario il calcolo dei momenti di ordine 5 e 6, essendo $\mu = 3$.

Si ha:

$$E(x_1(0)) = m_{x_{01}} \quad (5.1.6)$$

$$E(x_1(0)^2) = m_{x_{012}} \Rightarrow \sigma_{x_{01}}^2 = m_{x_{012}} - (m_{x_{01}})^2 \quad (5.1.7)$$

$$E(x_1(0)^3) = m_{x_{013}} \quad (5.1.8)$$

$$E(x_1(0)^4) = m_{x_{014}} \quad (5.1.9)$$

$$E(x_1(0)^5) = m_{x_{015}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{x_{01}}} e^{-\frac{(x_1 - m_{x_{01}})^2}{2(\sigma_{x_{01}})^2}} x_1^5 dx_1 \quad (5.1.10)$$

$$E(x_1(0)^6) = m_{x_{016}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{x_{01}}} e^{-\frac{(x_1 - m_{x_{01}})^2}{2(\sigma_{x_{01}})^2}} x_1^6 dx_1 \quad (5.1.11)$$

$$E(x_2(0)) = m_{x_{02}} \quad (5.1.12)$$

$$E(x_2(0)^2) = m_{x_{022}} \Rightarrow \sigma_{x_{02}}^2 = m_{x_{022}} - (m_{x_{02}})^2 \quad (5.1.13)$$

$$E(x_2(0)^3) = m_{x_{023}} \quad (5.1.14)$$

$$E(x_2(0)^4) = m_{x_{024}} \quad (5.1.15)$$

$$\begin{aligned} E(x_2(0)^5) = m_{x_{025}} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\alpha_M - \alpha_m)} \chi(x_2)_{[\alpha_m, \alpha_M]} x_2^5 dx_2 = \\ &= \int_{\alpha_m}^{\alpha_M} \frac{1}{(\alpha_M - \alpha_m)} x_2^5 dx_2 = \frac{\alpha_M^6 - \alpha_m^6}{6(\alpha_M - \alpha_m)} \end{aligned} \quad (5.1.16)$$

$$\begin{aligned} E(x_2(0)^6) = m_{x_{026}} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\alpha_M - \alpha_m)} \chi(x_2)_{[\alpha_m, \alpha_M]} x_2^6 dx_2 = \\ &= \int_{\alpha_m}^{\alpha_M} \frac{1}{(\alpha_M - \alpha_m)} x_2^6 dx_2 = \frac{\alpha_M^7 - \alpha_m^7}{7(\alpha_M - \alpha_m)} \end{aligned} \quad (5.1.17)$$

dove $\chi(x_2)_{[\alpha_m, \alpha_M]}$ è la *funzione caratteristica* dell'intervallo $[\alpha_m, \alpha_M]$.

I rumori sono gaussiani a media nulla, quindi si ha:

$$E(v(k)) = 0 \quad (5.1.18)$$

$$E(w(k)) = 0 \quad (5.1.19)$$

$$E(v(k)^2) = \sigma_v^2 \quad (5.1.20)$$

$$E(w(k)^2) = \sigma_w^2 \quad (5.1.21)$$

$$E(v(k)^3) = 0 \quad (5.1.22)$$

$$E(w(k)^3) = 0 \quad (5.1.23)$$

$$E(v(k)^4) = m_{v^4} \quad (5.1.24)$$

$$E(w(k)^4) = m_w^4 \quad (5.1.25)$$

$$E(v(k)^5) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_v} e^{-\frac{(v-m_v)^2}{2\sigma_v^2}} v^5 dv = 0 \quad (5.1.26)$$

$$E(w(k)^5) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_w} e^{-\frac{(w-m_w)^2}{2\sigma_w^2}} w^5 dw = 0 \quad (5.1.27)$$

$$E(v(k)^6) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_v} e^{-\frac{(v-m_v)^2}{2\sigma_v^2}} v^6 dv = m_v^6 \quad (5.1.28)$$

$$E(w(k)^6) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_w} e^{-\frac{(w-m_w)^2}{2\sigma_w^2}} w^6 dw = m_w^6. \quad (5.1.29)$$

5.2 I vettori estesi di stato e uscita

Si definiscono i seguenti vettori estesi di stato e di uscita:

$$X_3(k) = \begin{bmatrix} [x(k)]_3 \\ [x^{[2]}(k)]_3 \\ [x^{[3]}(k)]_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [x_1(k)]_3 \\ [x_2(k)]_3 \\ [x_1(k)^2]_3 \\ [x_1(k)x_2(k)]_3 \\ [x_2(k)x_1(k)]_3 \\ [x_2(k)^2]_3 \\ [x_1(k)^3]_3 \\ [x_1(k)^2x_2(k)]_3 \\ [x_1(k)x_2(k)^2]_3 \\ [x_1(k)x_2(k)^2]_3 \\ [x_1(k)x_2(k)^2]_3 \\ [x_1(k)x_2(k)^2]_3 \\ [x_2(k)^3]_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{14} \quad (5.2.1)$$

$$Y_3(k) = \begin{bmatrix} [y(k)]_3 \\ [y^2(k)]_3 \\ [y^3(k)]_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad (5.2.2)$$

indicando con $[\cdot]_3$ l'approssimazione di ordine 3 di un vettore (vedi appendice A, [3], [4], [10]).

Si è già osservato in precedenza che, adottando il formalismo delle *potenze di Kronecher ridotte*, solo $\binom{n+i-1}{i}$ componenti della potenza i -esima di Kronecker dello stato sono indipendenti, con n pari alla dimensione dello spazio di stato.

Nel nostro caso, quindi, considerando che $n = 2$ e che il vettore X_3 raccoglie le potenze dello stato fino all'ordine 3, con il formalismo ridotto lo stato esteso avrà dimensione pari a

$$n_3 = \sum_{i=1}^3 \binom{n+i-1}{i} = \sum_{i=1}^3 \binom{2+i-1}{i} = 9. \quad (5.2.3)$$

Eliminando le componenti ridondanti da X_3 , infatti, si ha:

$$X_3(k) = \begin{bmatrix} [x(k)]_3 \\ [x^{[2]}(k)]_3 \\ [x^{[3]}(k)]_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [x_1(k)]_3 \\ [x_2(k)]_3 \\ [x_1(k)^2]_3 \\ [x_1(k)x_2(k)]_3 \\ [x_2(k)^2]_3 \\ [x_1(k)^3]_3 \\ [x_1(k)^2x_2(k)]_3 \\ [x_1(k)x_2(k)^2]_3 \\ [x_2(k)^3]_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^9. \quad (5.2.4)$$

Ancor più che nel caso del filtro quadratico, in cui si poteva ridurre di una componente la dimensione dello stato esteso, l'utilizzo delle potenze di Kronecker ridotte in questo caso porta a una drastica riduzione della complessità computazionale dell'algoritmo. Infatti, ad esempio, il vettore di stato passa da 14 a 9 componenti (-36%) e le matrici $A_3(k)$, $\Psi^V(k)$, $\Psi^X(k)$, $P_p(k)$ e $P(k)$ (da calcolare a ogni passo) passano da 196 a 81 componenti (-59%).

In seguito sarà quindi utilizzato il formalismo ridotto al fine di aumentare l'efficienza dell'algoritmo.

5.3 L'approssimazione di ordine 3 del sistema

Per arrivare a scrivere l'equazione dello stato esteso e dell'uscita estesa, le singole componenti di tali vettori vengono approssimate al terzo ordine intorno, rispettivamente, alla stima corrente $\hat{x}(k | k) = \hat{x}(k)$ e alla predizione a un passo $\hat{x}(k | k - 1)$ dello stato esteso, come riportato nella sezione seguente. Di seguito sono quindi riportati gli sviluppi polinomiali arrestati al terzo ordine per tutte le componenti dello stato esteso intorno a un generico punto \tilde{x} .

Le componenti dello stato originario non sono da approssimare in quanto non contengono termini di ordine superiore a 3. Lo stesso vale per le potenze di x_2 .

- POTENZE DI X_1

Per il quadrato della prima componente dello stato originario, si ha:

$$\begin{aligned}
 (x_1(k+1))^2 &= (x_1(k)x_2(k) + v(k))^2 \approx \\
 &\approx \sum_{i=0}^3 \frac{1}{i!} (\nabla_x^{[i]} \otimes ((x_1x_2 + v)^2) |_{x=\tilde{x}}) (x(k) - \tilde{x})^{[i]} = \\
 &= (2\tilde{x}_1\tilde{x}_2^2)x_1(k) + (2\tilde{x}_1^2\tilde{x}_2)x_2(k) + (-\tilde{x}_2^2)x_1(k)^2 + (-4\tilde{x}_1\tilde{x}_2)x_1(k)x_2(k) + \\
 &+ (-\tilde{x}_1^2)x_2(k)^2 + (2\tilde{x}_2)x_1(k)^2x_2(k) + (2\tilde{x}_1)x_1(k)x_2(k)^2 + (-\tilde{x}_1^2\tilde{x}_2^2) + \\
 &+ (v(k)^2 + 2v(k)x_1(k)x_2(k)).
 \end{aligned}
 \tag{5.3.1}$$

Per il cubo della prima componente dello stato originario, si ha:

$$\begin{aligned}
(x_1(k+1))^3 &= (x_1(k)x_2(k) + v(k))^3 \approx \\
&\approx \sum_{i=0}^3 \frac{1}{i!} (\nabla_x^{[i]} \otimes ((x_1x_2 + v)^3) |_{x=\tilde{x}}) (x(k) - \tilde{x})^{[i]} = \\
&= (18\tilde{x}_1^2\tilde{x}_2^3)x_1(k) + (18\tilde{x}_1^3\tilde{x}_2^2)x_2(k) + (-9\tilde{x}_1\tilde{x}_2^3)x_1(k)^2 + \\
&+ (-27\tilde{x}_1^2\tilde{x}_2^2)x_1(k)x_2(k) + (-9\tilde{x}_1^3\tilde{x}_2)x_2(k)^2 + (\tilde{x}_2^3)x_1(k)^3 + \\
&+ (9\tilde{x}_1\tilde{x}_2^2)x_1(k)^2x_2(k) + (9\tilde{x}_1^2\tilde{x}_2)x_1(k)x_2(k)^2 + (\tilde{x}_1^3)x_2(k)^3 + \\
&+ (-10\tilde{x}_1^3\tilde{x}_2^3) + (v(k))^3 - 12v(k)x_1(k)x_2(k)\tilde{x}_1\tilde{x}_2 + 3v(k)^2x_1(k)x_2(k) + \\
&+ 6v(k)x_1(k)x_2(k)^2\tilde{x}_1 + 6v(k)x_1(k)\tilde{x}_1\tilde{x}_2^2 + 6v(k)x_1(k)^2x_2(k)\tilde{x}_2 + \\
&+ 6v(k)x_2(k)\tilde{x}_1^2\tilde{x}_2 - 3v(k)x_1(k)^2\tilde{x}_2^2 - 3v(k)x_2(k)^2\tilde{x}_1^2 - 3v(k)\tilde{x}_1^2\tilde{x}_2^2.
\end{aligned} \tag{5.3.2}$$

- PRODOTTI MISTI

Il prodotto misto del secondo ordine $x_1(k+1)x_2(k+1)$ non contiene termini di grado superiore a 3, quindi saranno da approssimare solo i prodotti misti del terzo ordine. Rispettivamente, per $x_1(k+1)^2x_2(k+1)$ e per $x_1(k+1)x_2(k+1)^2$ si arriva ai risultati seguenti:

$$\begin{aligned}
x_1(k+1)^2x_2(k+1) &= (x_1(k)x_2(k) + v(k))^2x_2(k) = v^2x_2 + 2vx_1x_2^2 + x_1^2x_2^3 \approx \\
&\approx \sum_{i=0}^3 \frac{1}{i!} (\nabla_x^{[i]} \otimes (v^2x_2 + 2vx_1x_2^2 + x_1^2x_2^3) |_{x=\tilde{x}}) (x(k) - \tilde{x})^{[i]} = \\
&= (6\tilde{x}_1\tilde{x}_2^3)x_1(k) + (9\tilde{x}_1^2\tilde{x}_2^2)x_2(k) + (-2\tilde{x}_2^3)x_1(k)^2 + \\
&+ (-12\tilde{x}_1\tilde{x}_2^2)x_1(k)x_2(k) + (-6\tilde{x}_1^2\tilde{x}_2)x_2(k)^2 + (3\tilde{x}_2^2)x_1(k)^2x_2(k) + \\
&+ (6\tilde{x}_1\tilde{x}_2)x_1(k)x_2(k)^2 + (\tilde{x}_1^2)x_2(k)^3 + (-4\tilde{x}_1^2\tilde{x}_2^3) + \\
&+ (v(k))^2x_2(k) + 2v(k)x_1(k)x_2(k)^2.
\end{aligned} \tag{5.3.3}$$

$$\begin{aligned}
x_1(k+1)x_2(k+1)^2 &= (x_1(k)x_2(k) + v(k))x_2(k)^2 = vx_2^2 + x_1x_2^3 \approx \\
&\approx \sum_{i=0}^3 \frac{1}{i!} (\nabla_x^{[i]} \otimes (vx_2^2 + x_1x_2^3) |_{x=\tilde{x}}) (x(k) - \tilde{x})^{[i]} = \\
&= (\tilde{x}_2^3) x_1(k) + (3\tilde{x}_1\tilde{x}_2^2) x_2(k) + (-3\tilde{x}_2^2) x_1(k)x_2(k) + \\
&+ (-3\tilde{x}_1\tilde{x}_2) x_2(k)^2 + (3\tilde{x}_2) x_1(k)x_2(k)^2 + (\tilde{x}_1) x_2(k)^3 + \\
&+ (-\tilde{x}_1\tilde{x}_2^3) + v(k)x_2(k)^2.
\end{aligned} \tag{5.3.4}$$

5.4 Equazione dello stato esteso

Per semplicità, si pone:

$$\begin{aligned}
n(k) &= (v(k)^3 - 12v(k)x_1(k)x_2(k)\tilde{x}_1\tilde{x}_2 + 3v(k)^2x_1(k)x_2(k) + 6v(k)x_1(k)x_2(k)^2\tilde{x}_1 + \\
&+ 6v(k)x_1\tilde{x}_1\tilde{x}_2^2 + 6v(k)x_1(k)^2x_2(k)\tilde{x}_2 + 6v(k)x_2(k)\tilde{x}_1^2\tilde{x}_2 - 3v(k)x_1(k)^2\tilde{x}_2^2 + \\
&- 3v(k)x_2(k)^2\tilde{x}_1^2 - 3v(k)\tilde{x}_1^2\tilde{x}_2^2) - 3\sigma_v^2 E(x_1(k)x_2(k)).
\end{aligned} \tag{5.4.1}$$

Riorganizzando le espressioni appena ottenute in forma matriciale, si ottiene la seguente equazione dello stato esteso.

Basta porre:

$$\begin{aligned}
 A_3(k, \tilde{x}) = & \\
 = & \begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 (2\tilde{x}_1\tilde{x}_2^2) & (2\tilde{x}_1^2\tilde{x}_2) & (-\tilde{x}_2^2) & (-4\tilde{x}_1\tilde{x}_2) & (-\tilde{x}_1^2) & 0 & (2\tilde{x}_2) & (2\tilde{x}_1) & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 (18\tilde{x}_1^2\tilde{x}_2^3) & (18\tilde{x}_1^3\tilde{x}_2^2) & (-9\tilde{x}_1\tilde{x}_2^3) & (-27\tilde{x}_1^2\tilde{x}_2^2) & (-9\tilde{x}_1^3\tilde{x}_2) & (\tilde{x}_2^3) & (9\tilde{x}_1\tilde{x}_2^2) & (9\tilde{x}_1^2\tilde{x}_2) & (\tilde{x}_1^3) \\
 (6\tilde{x}_1\tilde{x}_2^3) & (9\tilde{x}_1^2\tilde{x}_2^2) & (-2\tilde{x}_2^3) & (-12\tilde{x}_1\tilde{x}_2^2) & (-6\tilde{x}_1^2\tilde{x}_2) & 0 & (3\tilde{x}_2^2) & (6\tilde{x}_1\tilde{x}_2) & (\tilde{x}_1^2) \\
 (\tilde{x}_2^3) & (3\tilde{x}_1\tilde{x}_2^2) & 0 & (-3\tilde{x}_2^2) & (-3\tilde{x}_1\tilde{x}_2) & 0 & 0 & (3\tilde{x}_2) & (\tilde{x}_1) \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{bmatrix} \\
 & (5.4.2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U_3(k, \tilde{x}) = & \begin{bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 -\tilde{x}_1^2\tilde{x}_2^2 + \sigma_v^2 \\
 0 \\
 0 \\
 (-10\tilde{x}_1^3\tilde{x}_2^3) + 3\sigma_v^2 E(x_1(k)x_2(k)) \\
 (-4\tilde{x}_1^2\tilde{x}_2^3) + \sigma_v^2 E(x_2(k)) \\
 (-\tilde{x}_1\tilde{x}_2^3) \\
 0
 \end{bmatrix} \\
 & (5.4.3)
 \end{aligned}$$

$$V_3(k) = \begin{bmatrix} v(k) \\ 0 \\ v(k)^2 + 2v(k)x_1(k)x_2(k) - \sigma_v^2 \\ v(k)x_2(k) \\ 0 \\ n(k) \\ (v(k)^2x_2(k) + 2v(k)x_1(k)x_2(k)^2) - \sigma_v^2E(x_2(k)) \\ v(k)x_2(k)^2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.4.4)$$

e si può scrivere:

$$X_3(k+1) = A_3(k, \tilde{x})X_3(k) + U_3(k, \tilde{x}) + V_3(k) \quad (5.4.5)$$

in cui il rumore esteso è a media nulla.

5.5 Equazione dell'uscita estesa

Per l'uscita e le sue potenze, valgono le seguenti espressioni:

$$y(k) = x_1(k) + w(k) \quad (5.5.1)$$

$$y(k)^2 = (x_1(k) + w(k))^2 = x_1(k)^2 + w(k)^2 + 2w(k)x_1(k) \quad (5.5.2)$$

$$y(k)^3 = (x_1(k) + w(k))^3 = x_1(k)^3 + 3w(k)x_1(k)^2 + 3w(k)^2x_1(k) + w(k)^3. \quad (5.5.3)$$

Le espressioni non contengono termini di grado superiore a 3, quindi non c'è bisogno di approssimare le espressioni tramite uno sviluppo in serie.

L'equazione dell'uscita estesa si ottiene ordinando tali espressioni in forma matriciale:

$$\begin{aligned}
Y_3(k) &= \begin{bmatrix} y(k) \\ y(k)^2 \\ y(k)^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(k) + w(k) \\ x_1(k)^2 + w(k)^2 + 2w(k)x_1(k) \\ x_1(k)^3 + 3w(k)x_1(k)^2 + 3w(k)^2x_1(k) + w(k)^3 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_1(k)^2 \\ x_1(k)x_2(k) \\ x_2(k)^2 \\ x_1(k)^3 \\ x_1(k)^2x_2(k) \\ x_1(k)x_2(k)^2 \\ x_2(k)^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_w^2 \\ 3\sigma_w^2 E(x_1(k)) \end{bmatrix} + \\
&+ \begin{bmatrix} w(k) \\ w(k)^2 + 2w(k)x_1(k) - \sigma_w^2 \\ 3w(k)x_1(k)^2 + 3w(k)^2x_1(k) + w(k)^3 - 3\sigma_w^2 E(x_1(k)) \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{5.5.4}$$

Ponendo:

$$C_3(k, \tilde{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.5.5}$$

$$\Gamma_3(k, \tilde{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_w^2 \\ 3\sigma_w^2 E(x_1(k)) \end{bmatrix} \tag{5.5.6}$$

$$W_3(k) = \begin{bmatrix} w(k) \\ w(k)^2 + 2w(k)x_1(k) - \sigma_w^2 \\ 3w(k)x_1(k)^2 + 3w(k)^2x_1(k) + w(k)^3 - 3\sigma_w^2E(x_1(k)) \end{bmatrix} \quad (5.5.7)$$

e si ottiene:

$$Y_3(k) = C_3(k, \tilde{x})X_3(k) + \Gamma_3(k, \tilde{x}) + W_3(k) \quad (5.5.8)$$

con rumore di osservazione a media nulla.

5.6 Calcolo delle condizioni iniziali del filtro

All'istante iniziale non sono disponibili osservazioni, pertanto la migliore predizione dello stato esteso coincide con il suo valore atteso:

$$\hat{X}(0 | -1) = E(X_3(0)) = E \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_1(0)^2 \\ x_1(0)x_2(0) \\ x_2(0)^2 \\ x_1(0)^3 \\ x_1(0)^2x_2(0) \\ x_1(0)x_2(0)^2 \\ x_2(0)^3 \end{bmatrix} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} E(x_1(0)) \\ E(x_2(0)) \\ E(x_1(0)^2) \\ E(x_1(0)x_2(0)) \\ E(x_2(0)^2) \\ E(x_1(0)^3) \\ E(x_1(0)^2x_2(0)) \\ E(x_1(0)x_2(0)^2) \\ E(x_2(0)^3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{x_{01}} \\ m_{x_{02}} \\ m_{x_{012}} \\ m_{x_{01}}m_{x_{02}} \\ m_{x_{022}} \\ m_{x_{013}} \\ m_{x_{012}}m_{x_{02}} \\ m_{x_{01}}m_{x_{022}} \\ m_{x_{023}} \end{bmatrix} \quad (5.6.1)$$

La matrice di covarianza dell'errore di predizione viene inizializzata con il valore della covarianza dello stato esteso iniziale:

$$P_P(0) = Cov(X_3(0)) = E \left[(X_3(0) - E(X_3(0))) (X_3(0) - E(X_3(0)))^T \right]. \quad (5.6.2)$$

5.7 Calcolo delle covarianze dei rumori estesi

I rumori estesi di stato e di osservazione, come visto in precedenza, hanno le seguenti espressioni:

$$V_3(k) = \begin{bmatrix} v(k) \\ 0 \\ v(k)^2 + 2v(k)x_1(k)x_2(k) - \sigma_v^2 \\ v(k)x_2(k) \\ 0 \\ n(k) \\ (v(k)^2x_2(k) + 2v(k)x_1(k)x_2(k)^2) - \sigma_v^2E(x_2(k)) \\ v(k)x_2(k)^2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.7.1)$$

$$W_3(k) = \begin{bmatrix} w(k) \\ w(k)^2 + 2w(k)x_1(k) - \sigma_w^2 \\ 3w(k)x_1(k)^2 + 3w(k)^2x_1(k) + w(k)^3 - 3\sigma_w^2E(x_1(k)) \end{bmatrix} \quad (5.7.2)$$

Si noti che, a differenza dei rumori originari, i rumori estesi dipendono a ogni istante dallo stato corrente e quindi le loro caratteristiche statistiche possono variare nel tempo. Ciò significa, ad esempio, che le matrici di covarianza non sono in generale costanti ma vanno calcolate ad ogni passo.

Per evitare ambiguità, si rinominano alcune componenti dello stato esteso nel modo seguente:

$$x_3(k) = x_1(k)^2 \quad (5.7.3)$$

$$x_4(k) = x_1(k)x_2(k) \quad (5.7.4)$$

$$x_5(k) = x_2(k)^2 \quad (5.7.5)$$

$$x_7(k) = x_1(k)^2x_2(k) \quad (5.7.6)$$

$$x_8(k) = x_1(k)x_2(k)^2 \quad (5.7.7)$$

e quindi si possono calcolare tutti i termini che compaiono nella covarianza del rumore esteso di stato, che ha un'espressione molto complessa (vedi Appendice B).

Tenendo conto che si tratta di sequenze bianche, si può scrivere:

$$\Psi^V(k) = E(V_3(k)V_3(k)^T) \quad (5.7.8)$$

$$\Psi^W(k) = E(W_3(k)W_3(k)^T). \quad (5.7.9)$$

Le espressioni esplicite di tali matrici sono riportate in sede di simulazione.

Si noti che in generale le covarianze dei rumori estesi dipendono dai momenti del secondo ordine dello stato esteso allo stesso istante. La matrice dei momenti del secondo ordine dello stato esteso è calcolabile a partire da quella all'istante precedente tramite la formula ricorsiva:

$$\begin{aligned} \Psi^X(k+1, \tilde{x}) &= A_3(k, \tilde{x})\Psi^X(k, \tilde{x})A_3(k, \tilde{x})^T + U_3(k, \tilde{x})U_3(k, \tilde{x})^T + \Psi^V(k, \tilde{x}) + \\ &+ A_3(k, \tilde{x})Z_3(k)U_3(k, \tilde{x})^T + U_3(k, \tilde{x})Z_3(k)^T A_3(k, \tilde{x})^T \end{aligned} \quad (5.7.10)$$

dove $Z_3(k) = E(X_3(k))$ è il valor medio dello stato esteso, ottenibile ricorsivamente nel modo seguente:

$$Z_3(k+1) = A_3(k, \tilde{x})Z_3(k) + U_3(k, \tilde{x}). \quad (5.7.11)$$

Infine, la matrice dei momenti del secondo ordine dello stato è inizializzata in modo analogo a quello visto nel caso di filtro quadratico.

Capitolo 6

Implementazione del filtro e simulazione

In questo capitolo saranno mostrati i risultati ottenuti in sede di simulazione per il sistema preso in esame nei capitoli precedenti. A tale sistema è stato applicato l'algoritmo di filtraggio quadratico e cubico, secondo le due metodologie illustrate precedentemente per la stima del parametro.

I calcoli e le simulazioni del sistema e dei filtri sono stati svolti mediante il MATLAB.

In base ai risultati delle simulazioni è possibile confrontare lo stato e il parametro veri con quelli stimati, e quindi si può valutare il miglioramento che si ha nella stima se si utilizza, in luogo del filtro di Kalman esteso, che altro non è che il filtro polinomiale di ordine 1, un filtro polinomiale di ordine superiore.

6.1 Il sistema

Il sistema in esame è il seguente:

$$x(k+1) = \alpha x(k) + v(k) \quad (6.1.1)$$

$$y(k) = x(k) + w(k) \quad (6.1.2)$$

con

$$\alpha = 0.7 \quad (6.1.3)$$

Lo stato iniziale $x(0)$ viene generato casualmente dal MATLAB in sede di simulazione in quanto viene modellato come una variabile aleatoria gaussiana di media e varianza note.

Con l'inclusione del parametro tra le variabili da stimare, lo stato diventa di dimensione 2: $x_1(k)$ coincide con lo stato originario, mentre $x_2(k) = x_2(k-1) = x_2(0)$ è una variabile aleatoria da caratterizzare opportunamente.

$x_1(0)$ viene visto come una variabile aleatoria gaussiana, con le seguenti caratteristiche:

$$m_{x_{01}} = 1 \quad (6.1.4)$$

$$m_{x_{012}} = 2 \Rightarrow \sigma_{x_{01}}^2 = 1. \quad (6.1.5)$$

Quindi i momenti di ordine superiore sono i seguenti:

$$E(x_1(0)^3) = m_{x_{013}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_1-1)^2}{2}} x_1^3 dx_1 = 4 \quad (6.1.6)$$

$$E(x_1(0)^4) = m_{x_{014}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_1-1)^2}{2}} x_1^4 dx_1 = 10 \quad (6.1.7)$$

$$E(x_1(0)^5) = m_{x_{015}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_1-1)^2}{2}} x_1^5 dx_1 = 26 \quad (6.1.8)$$

$$E(x_1(0)^6) = m_{x_{016}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_1-1)^2}{2}} x_1^6 dx_1 = 76. \quad (6.1.9)$$

Nel primo approccio, $x_2(0)$ coincide con il parametro e viene visto come una variabile aleatoria uniforme sull'intervallo $(-\alpha_m, \alpha_M)$.

I momenti necessari all'implementazione del filtro sono calcolati direttamente dal programma MATLAB che effettua le simulazioni (vedi Appendice B).

Nel secondo approccio, $x_2(0)$ non coincide con il parametro e viene visto come una variabile aleatoria gaussiana con le seguenti caratteristiche:

$$E(x_2(0)) = 0 \quad (6.1.10)$$

$$E(x_2(0)^2) = m_{x_{022}} = \sigma_{x_{02}}^2 = 1 \quad (6.1.11)$$

e quindi i momenti di ordine superiore sono i seguenti:

$$E(x_2(0)^3) = m_{x_{023}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_2^2}{2}} x_2^3 dx_2 = 0 \quad (6.1.12)$$

$$E(x_2(0)^4) = m_{x_{024}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_2^2}{2}} x_2^4 dx_2 = 3 \quad (6.1.13)$$

$$E(x_2(0)^5) = m_{x_{025}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_2^2}{2}} x_2^5 dx_2 = 0 \quad (6.1.14)$$

$$E(x_2(0)^6) = m_{x_{026}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_2^2}{2}} x_2^6 dx_2 = 15. \quad (6.1.15)$$

6.2 Descrizione delle simulazioni

I vari algoritmi di filtraggio presentati nei capitoli precedenti sono stati provati in 4 diversi esempi di simulazione.

Nella prima simulazione, si sono considerati dei rumori di stato e di osservazione molto piccoli, mentre nelle restanti simulazioni è stato aumentato il valore quadratico medio dei rumori, al fine di mettere a dura prova gli stimatori e valutarne la bontà. Si ricordi che, essendo $\alpha = 0.7$, lo stato tende a decrescere con il passare del tempo, quindi, dopo un certo numero di istanti, anche rumori che erano inizialmente trascurabili cominciano ad acquistare peso.

Precisamente, nel primo caso, si è posto:

$$E(v(k)^2) = 0.0001 \quad (6.2.1)$$

$$E(w(k)^2) = 0.0004 \quad (6.2.2)$$

e quindi per i momenti di ordine superiore si ha:

$$E(v(k)^4) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}0.01} e^{-\frac{v^2}{0.0002}} v^4 dv = 3 \times 10^{-8} \quad (6.2.3)$$

$$E(w(k)^4) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}0.02} e^{-\frac{w^2}{0.0008}} w^4 dw = 4.8 \times 10^{-7} \quad (6.2.4)$$

$$E(v(k)^6) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}0.01} e^{-\frac{v^2}{0.0002}} v^6 dv = 1.5001 \times 10^{-11} \quad (6.2.5)$$

$$E(w(k)^6) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}0.02} e^{-\frac{w^2}{0.0008}} w^6 dw = 9.6 \times 10^{-10}. \quad (6.2.6)$$

Si ricordi che i momenti di ordine dispari sono sempre identicamente nulli.

Nelle restanti 3 simulazioni, invece, l'entità dei rumori è in media più consistente.

Cioè, si pone:

$$E(v(k)^2) = 0.01 \quad (6.2.7)$$

$$E(w(k)^2) = 0.04 \quad (6.2.8)$$

e quindi i momenti di ordine superiore sono i seguenti:

$$E(v(k)^4) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}0.1} e^{-\frac{v^2}{0.02}} v^4 dv = 3 \times 10^{-4} \quad (6.2.9)$$

$$E(w(k)^4) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}0.2} e^{-\frac{w^2}{0.08}} w^4 dw = 4.8 \times 10^{-3} \quad (6.2.10)$$

$$E(v(k)^6) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}0.1} e^{-\frac{v^2}{0.02}} v^6 dv = 1.5001 \times 10^{-5} \quad (6.2.11)$$

$$E(w(k)^6) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}0.2} e^{-\frac{w^2}{0.08}} w^6 dw = 9.6 \times 10^{-4}. \quad (6.2.12)$$

Nelle prime 2 simulazioni, l'informazione a priori sul parametro è molto scarsa, in quanto si ipotizza:

$$\alpha_m = -0.9 \quad (6.2.13)$$

$$\alpha_M = 0.9. \quad (6.2.14)$$

Poichè si sa che $\alpha \in [\alpha_m, \alpha_M]$, ciò significa che a priori non si ha neanche un'informazione di segno sul parametro.

Nelle ultime due simulazioni, quest'intervallo viene progressivamente ristretto.

Nella terza simulazione si pone:

$$\alpha_m = 0.1 \quad (6.2.15)$$

$$\alpha_M = 0.9 \quad (6.2.16)$$

e nell'ultima:

$$\alpha_m = 0.4 \quad (6.2.17)$$

$$\alpha_M = 0.9. \quad (6.2.18)$$

Ci si aspetta quindi un miglioramento della stima passando rispettivamente dalla seconda alla terza simulazione, così come ci si aspetta un miglioramento passando dalla terza alla quarta, essendo in qualche modo migliorata l'informazione a priori che si aveva sul parametro.

Nell'ambito di ogni simulazione, invece, è auspicabile che il filtro polinomiale si comporti in modo migliore rispetto al filtro di Kalman esteso, fissato a priori il metodo per la stima dei parametri (metodo *uniforme* o metodo *gaussiano*). A parità di ordine dello stimatore, è interessante vedere quale delle due metodologie funziona meglio.

6.3 Risultati delle simulazioni

Simulazione 1

Con rumori piccoli, il filtro di Kalman esteso si comporta bene nello stimare lo stato, come si vede in figura 6.1.

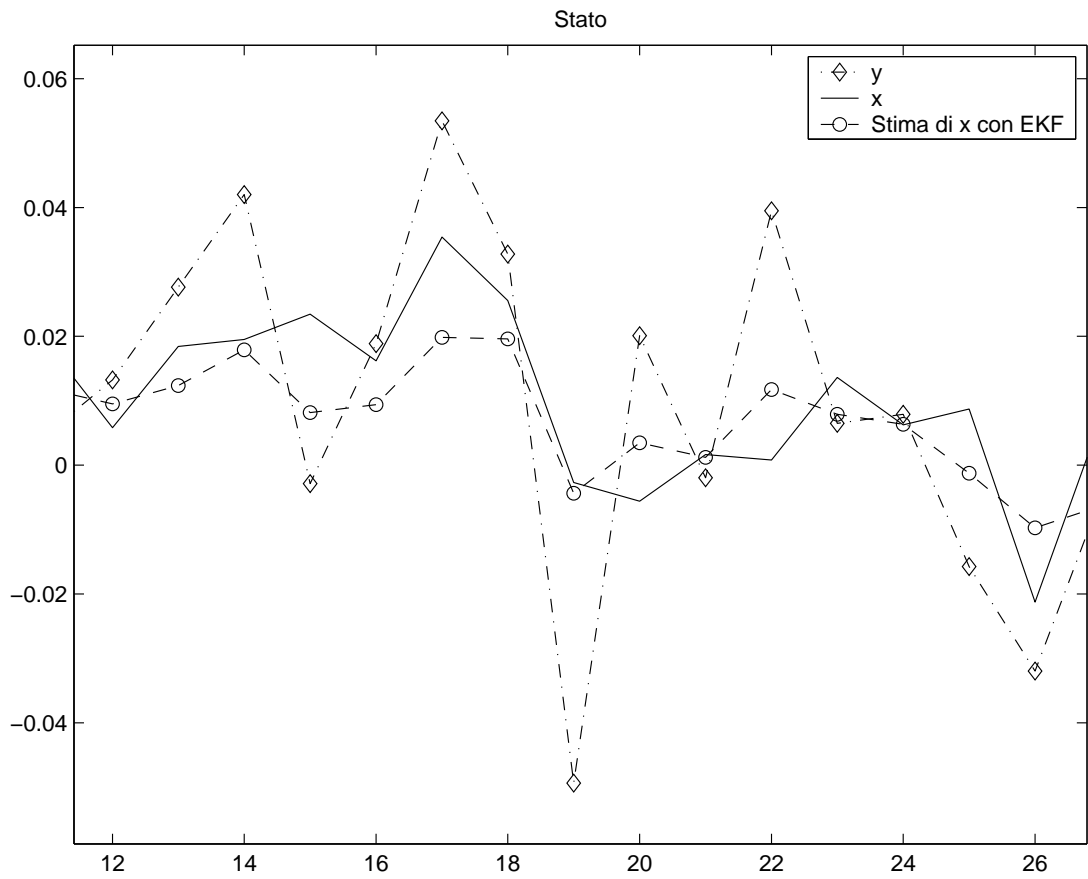


Figura 6.1: Simulazione 1: stima dello stato (EKF)

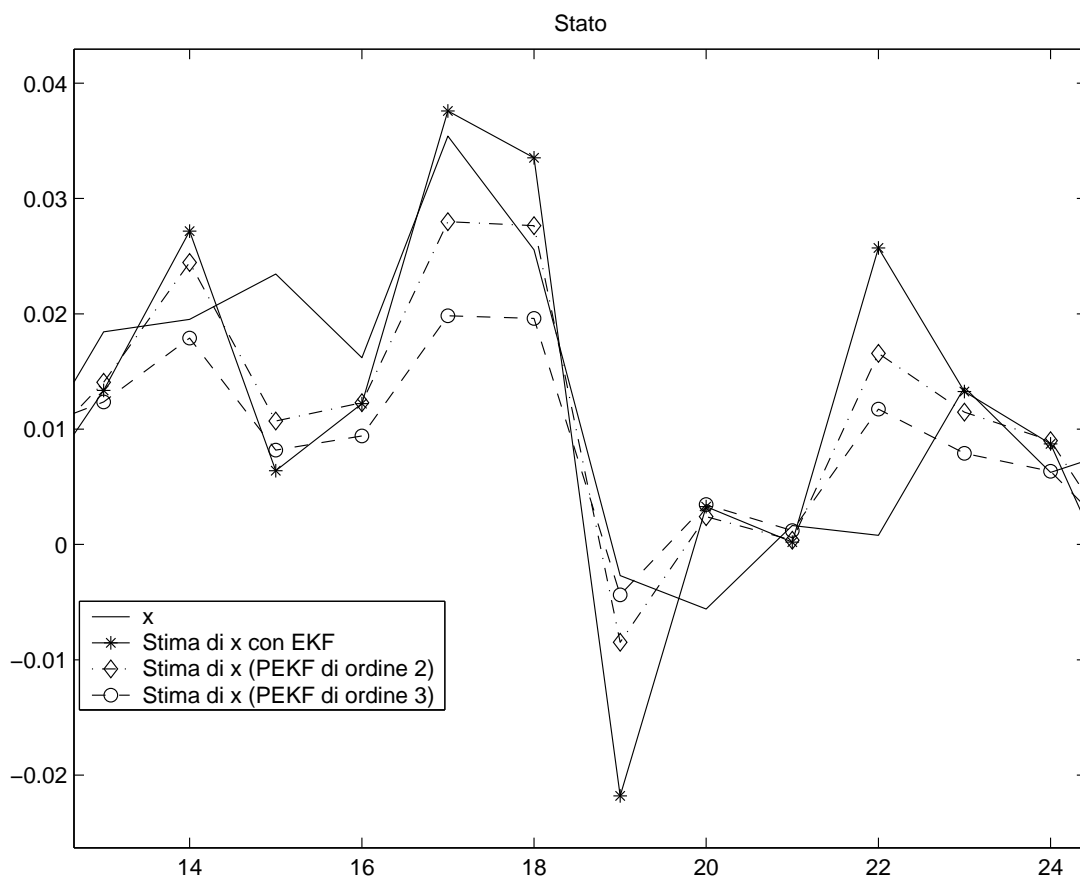


Figura 6.2: Simulazione 1: stima dello stato

Ulteriori miglioramenti sono introdotti dal filtro quadratico e cubico, rispettivamente (figura 6.2).

Riguardo alla stima del parametro, a parità di ordine dello stimatore, si comporta meglio il filtro che agisce secondo il metodo *gaussiano*, come si evince dal confronto tra i grafici 6.3-6.7.

Le varianze campionarie degli errori di stima sono le seguenti:

	EKF(stima uniforme)	EKF(stima gaussiana)	PEKF(stima uniforme), $\mu = 2$
$\sigma_{\hat{x}_1}^2$	$2.04 \cdot 10^{-4}$	$1.50 \cdot 10^{-4}$	$1.46 \cdot 10^{-4}$
$\sigma_{\hat{\alpha}}^2$	$3.37 \cdot 10^{-3}$	$1.34 \cdot 10^{-3}$	$1.13 \cdot 10^{-3}$

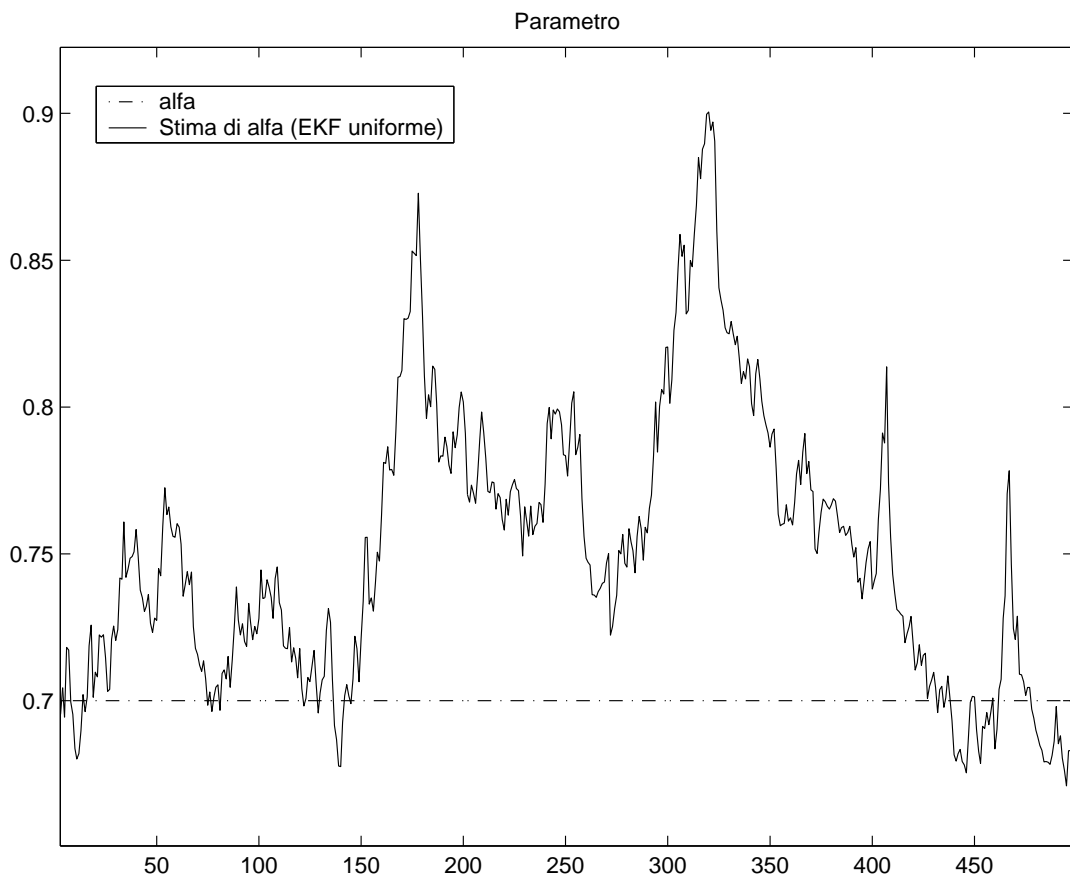


Figura 6.3: Simulazione 1: stima del parametro (EKF uniforme)

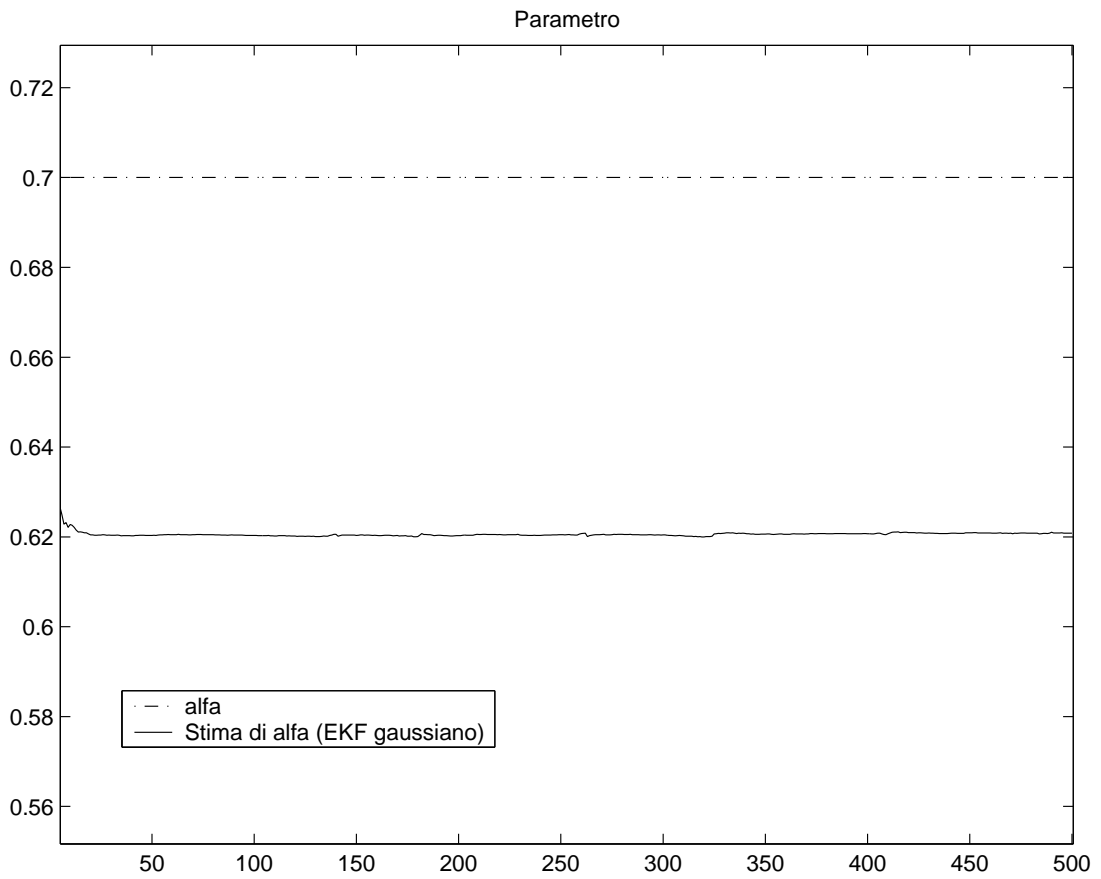


Figura 6.4: Simulazione 1: stima del parametro (EKF gaussiano)

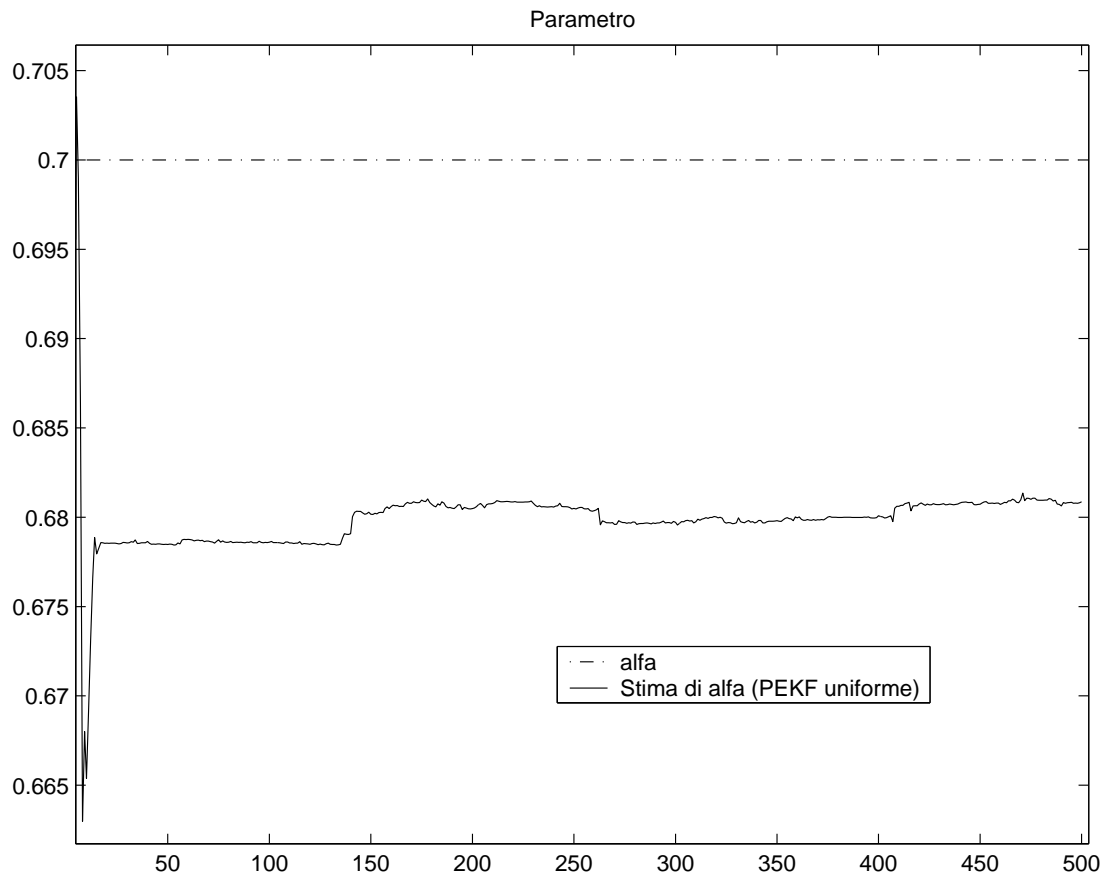


Figura 6.5: Simulazione 1: stima del parametro (PEKF uniforme, $\mu = 2$)

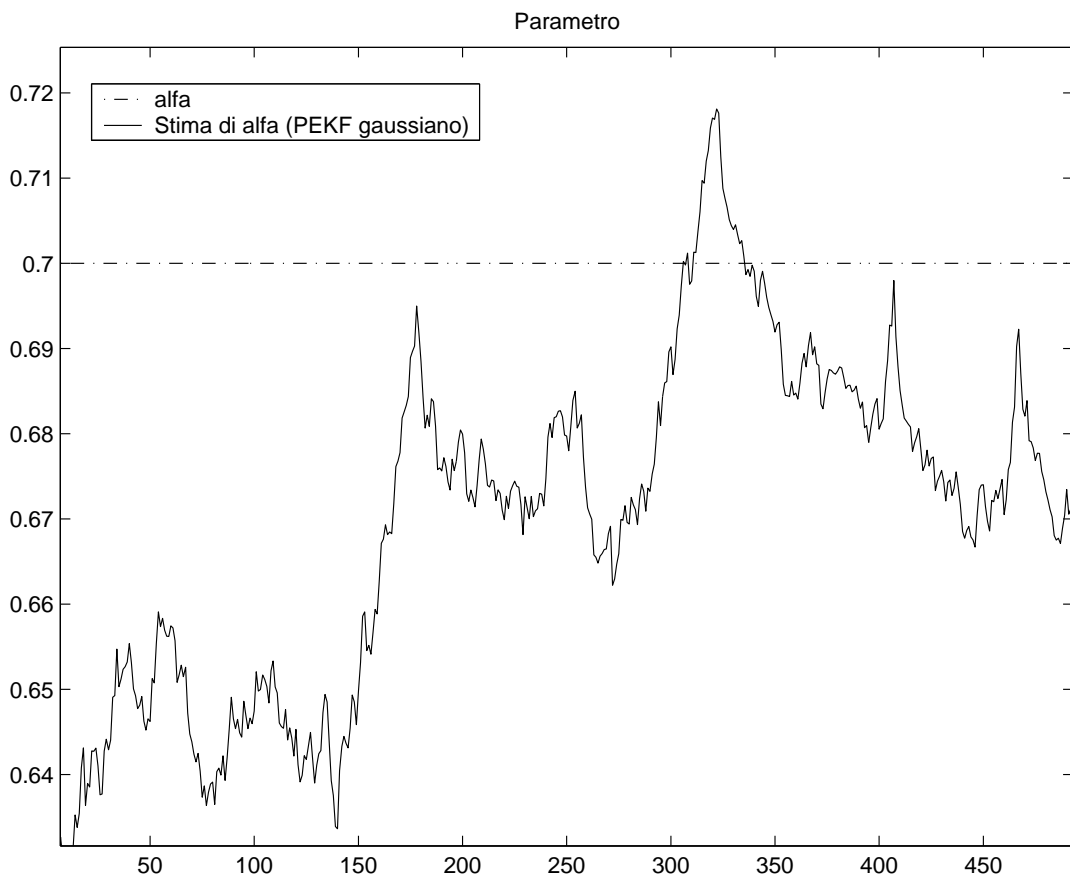


Figura 6.6: Simulazione 1: stima del parametro (PEKF gaussiano, $\mu = 2$)

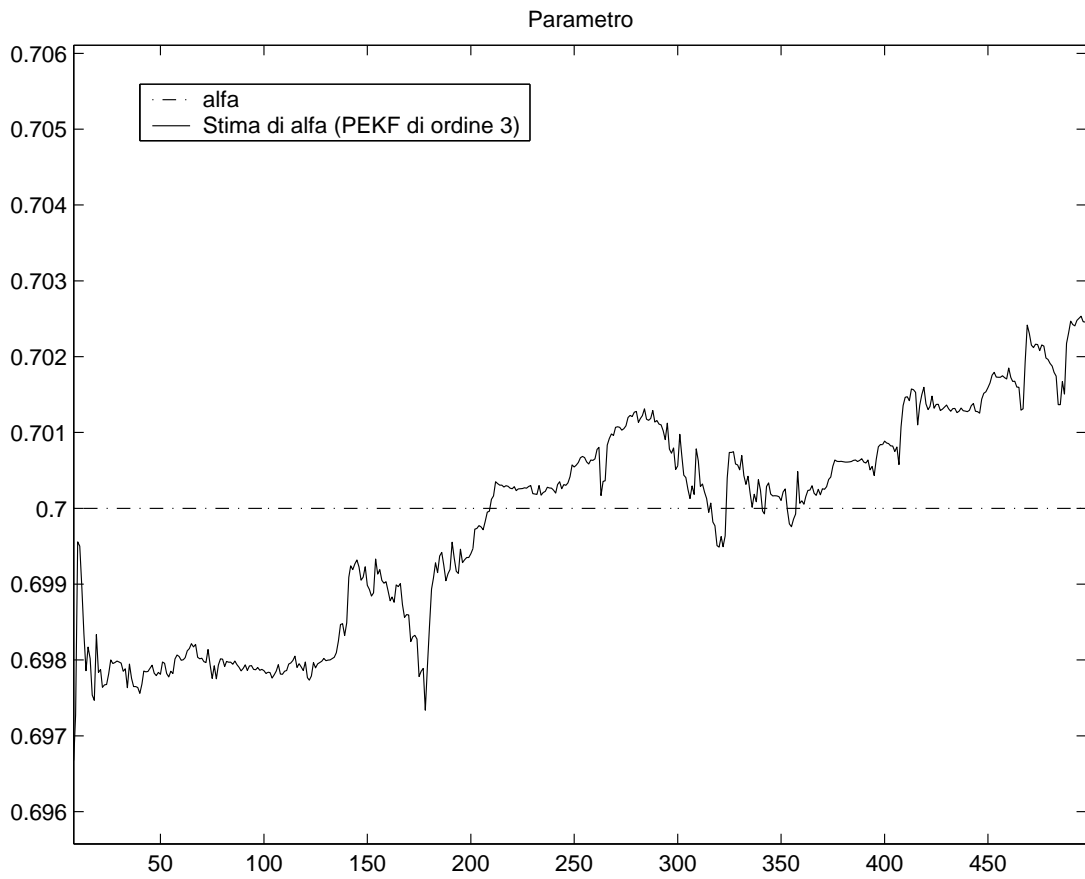


Figura 6.7: Simulazione 1: stima del parametro (PEKF uniforme, $\mu = 3$)

	PEKF(stima gaussiana), $\mu = 2$	PEKF, $\mu = 3$
$\sigma_{\hat{x}_1}^2$	$1.41 \cdot 10^{-4}$	$1.15 \cdot 10^{-4}$
$\sigma_{\hat{\alpha}}^2$	$9.42 \cdot 10^{-4}$	$8.77 \cdot 10^{-4}$

Dalle simulazioni, inoltre, risulta che la varianza campionaria dell'errore che si commette stimando lo stato con l'uscita vale $3.95 \cdot 10^{-4}$.

Considerando la varianza dell'errore come indice per valutare la bontà di una stima, questo suggerisce le seguenti conclusioni:

1. L'uso del filtro di Kalman esteso per stimare lo stato in luogo dell'uscita porta mediamente a un miglioramento nella stima dello stato del 55 %.
2. Il filtro quadratico e cubico rispetto al filtro di Kalman esteso migliorano ulteriormente la stima dello stato del 9.5 % e del 23.3 %, rispettivamente.
3. Il parametro è stimato molto meglio dai filtri *gaussiani*, che in media migliorano la stima del parametro del 38.4 % rispetto al filtro *uniforme* dello stesso ordine.
4. Il filtro di ordine 3 del tipo *uniforme* è risultato il migliore nello stimare simultaneamente stato e parametro, migliorando la stima fatta dal filtro quadratico *gaussiano* rispettivamente del 18.4 % per lo stato e del 6.9 % per il parametro.

Simulazione 2

Anche con rumore notevolmente più grande, il filtro di Kalman esteso stima lo stato con sufficiente precisione (figura 6.8).

Il filtro quadratico e il filtro cubico, ovviamente, offrono una stima migliore (figura 6.9).

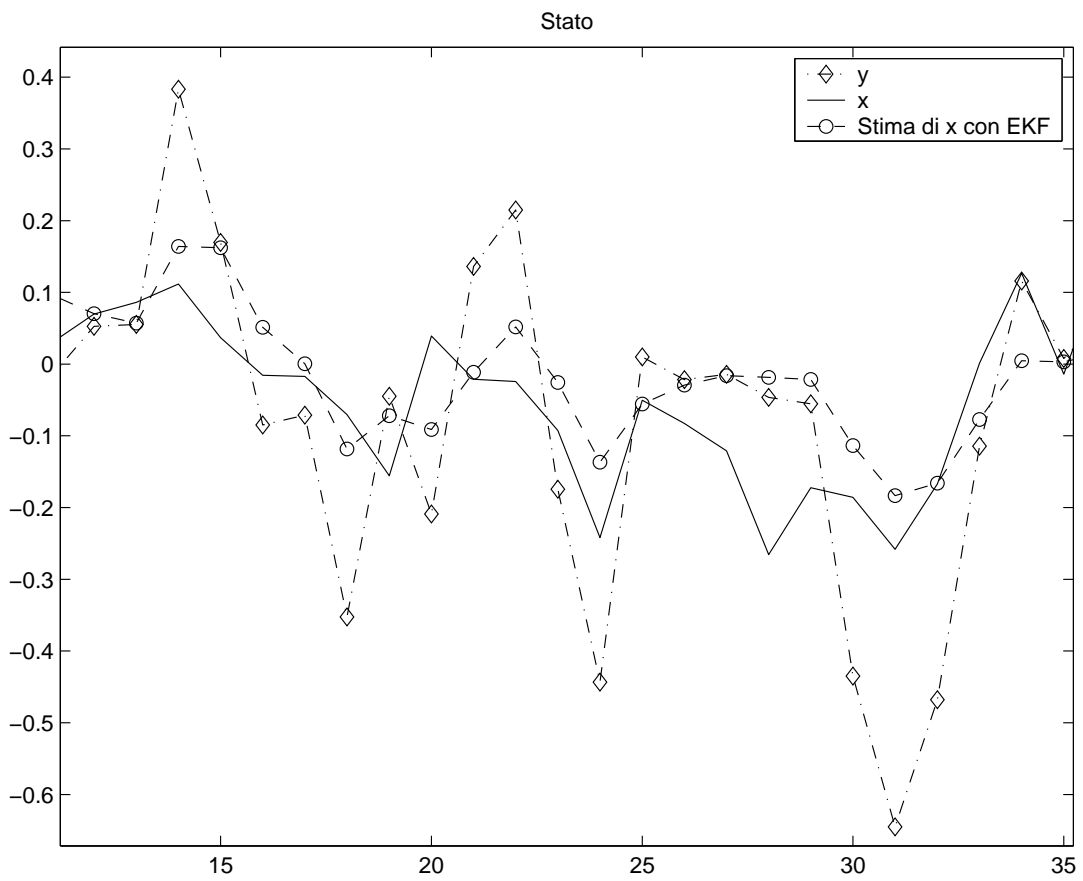


Figura 6.8: Simulazione 2: stima dello stato (EKF)

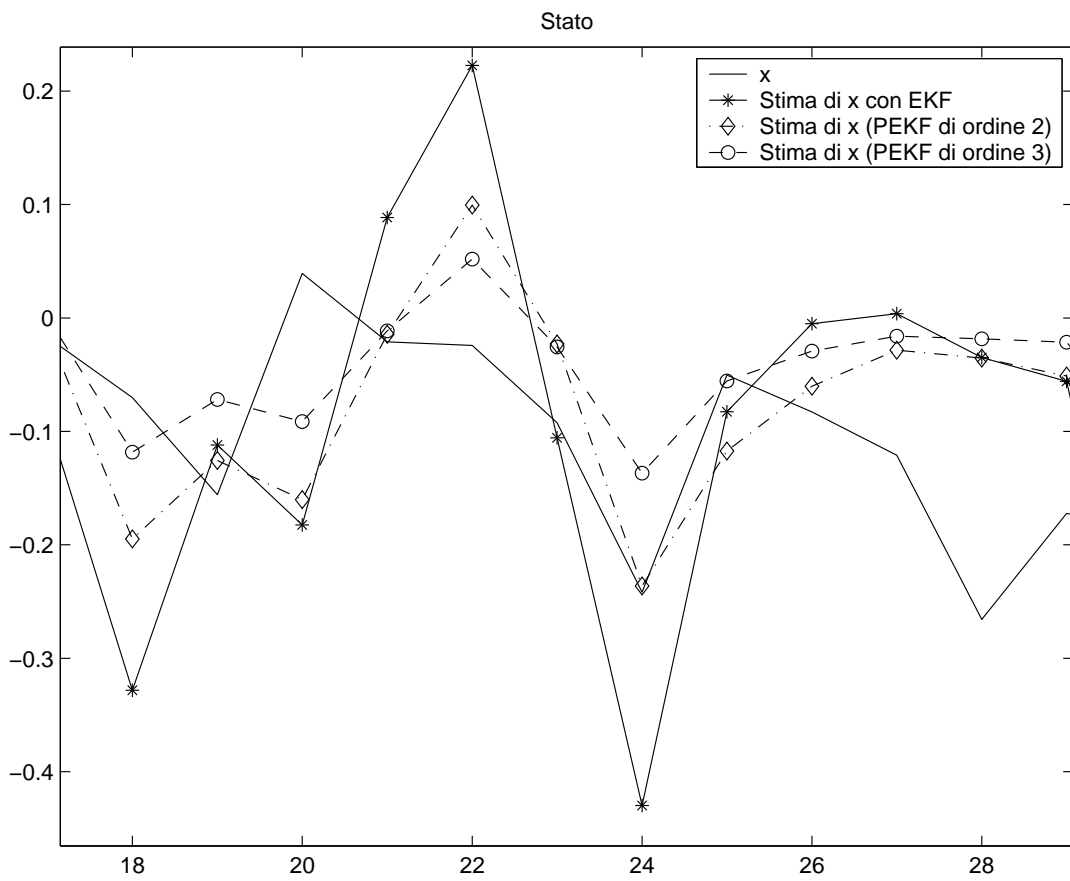


Figura 6.9: Simulazione 2: stima dello stato

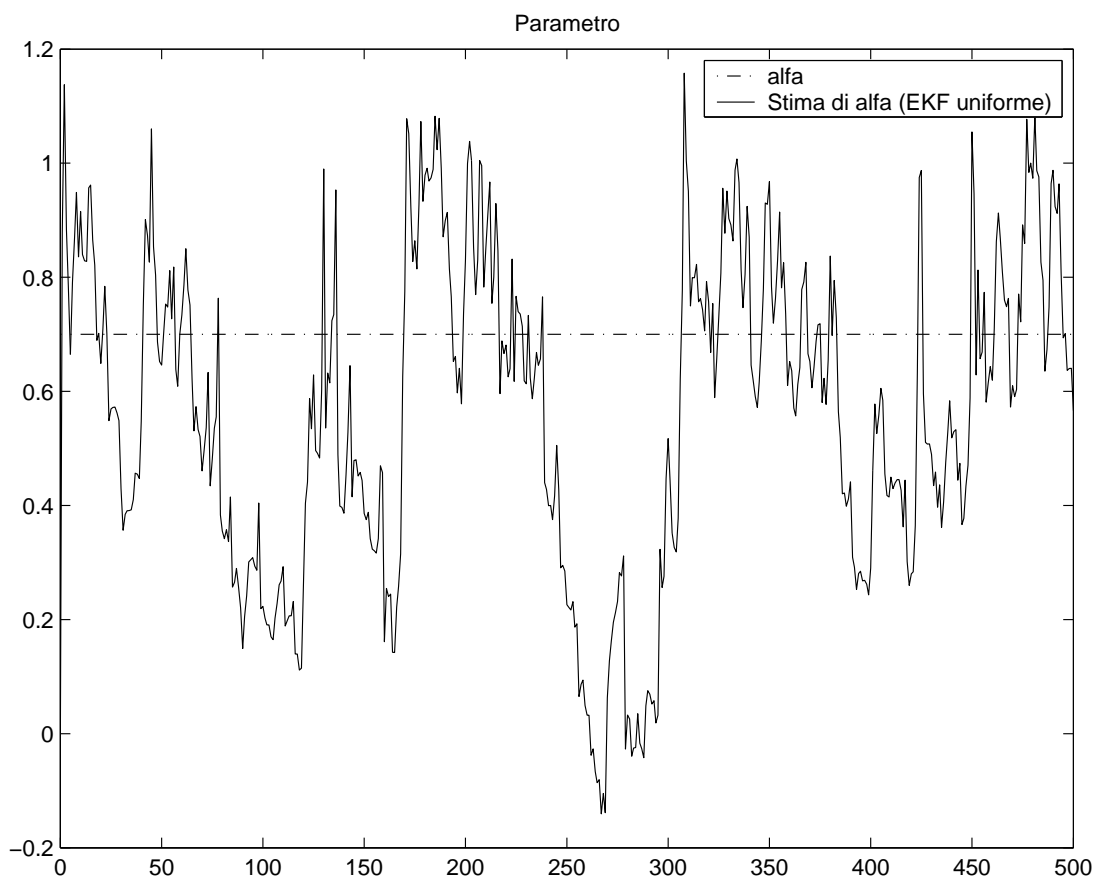


Figura 6.10: Simulazione 2: stima del parametro (EKF uniforme)

Riguardo alla stima dei parametri, invece, il filtro di Kalman esteso non offre una stima accettabile, indipendentemente dal metodo di stima adottata, come si vede dalle figure 6.10-6.11.

Notevolmente migliori sono le stime svolte dal filtro quadratico e da quello cubico, anche se in generale le stime del tipo *uniforme* mostrano un errore di *offset* rispetto al valore vero dello stato (figure da 6.12 a 6.14).

Riassumendo i test effettuati, a livello di varianze degli errori, si ha:

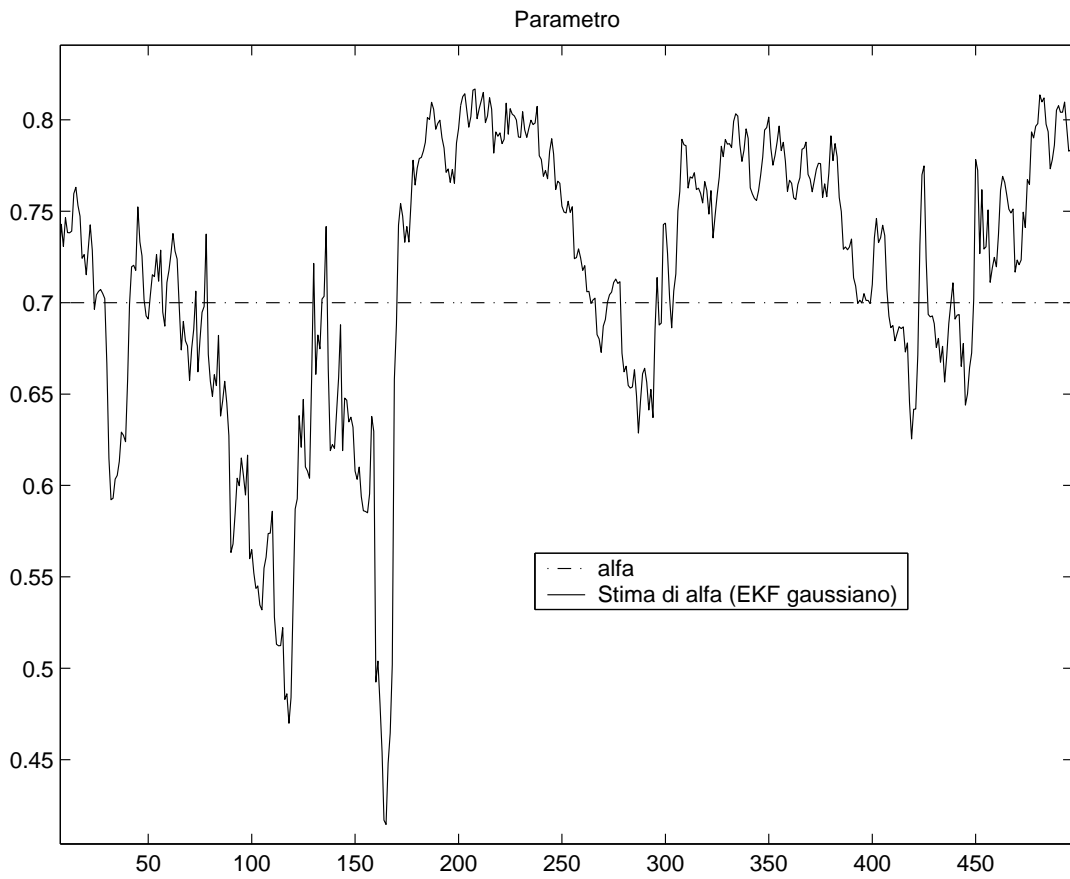


Figura 6.11: Simulazione 2: stima del parametro (EKF gaussiano)

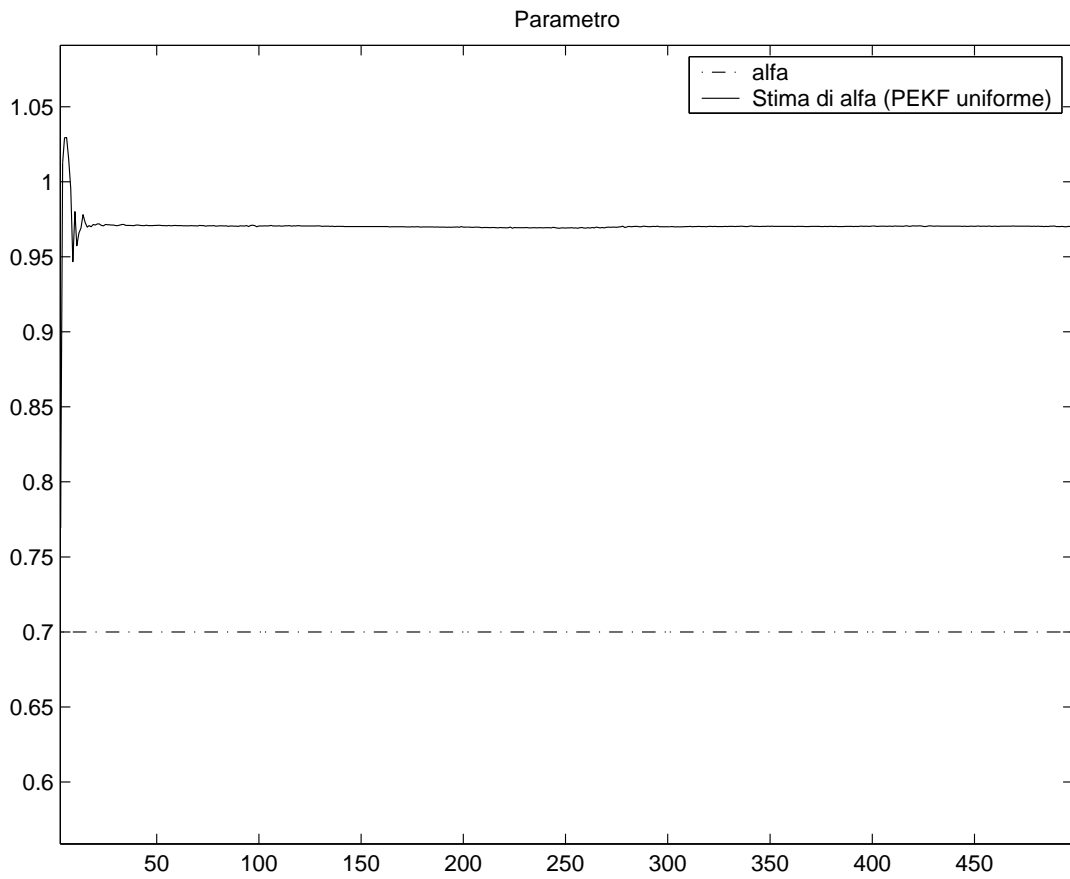


Figura 6.12: Simulazione 2: stima del parametro (PEKF uniforme, $\mu = 2$)

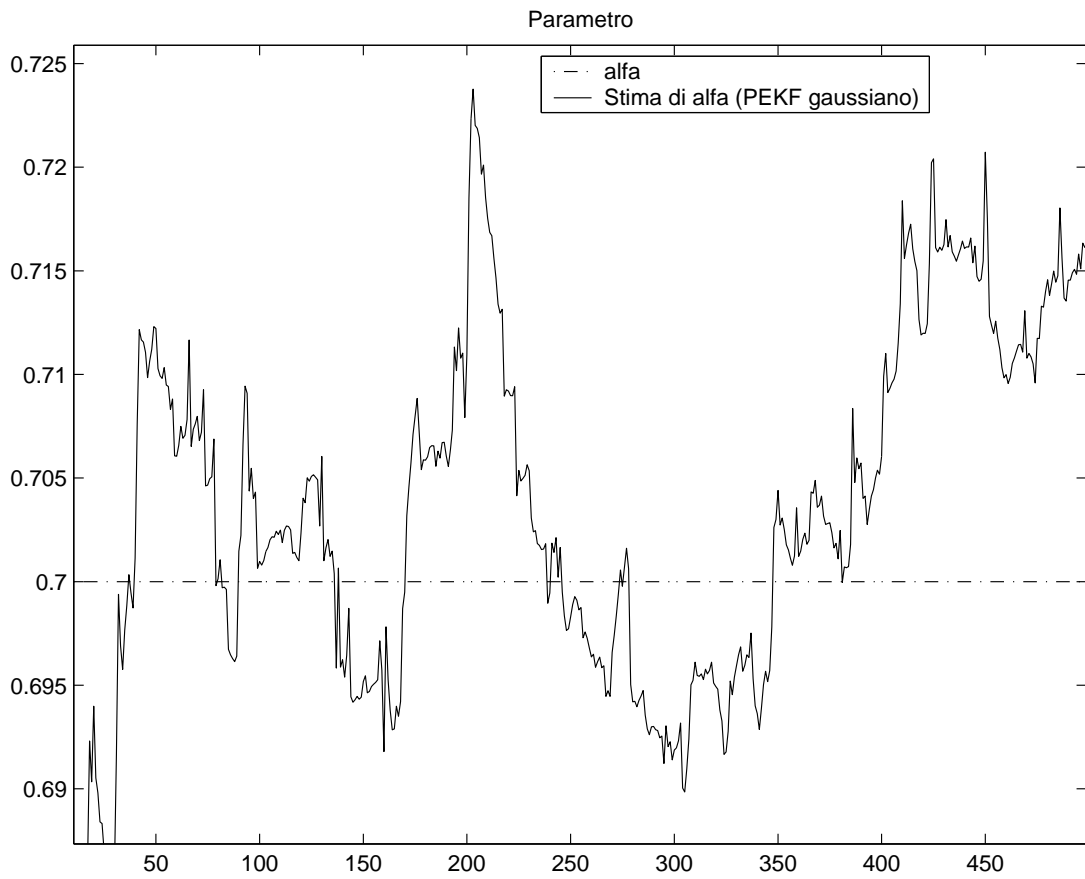


Figura 6.13: Simulazione 2: stima del parametro (PEKF gaussiano, $\mu = 2$)



Figura 6.14: Simulazione 2: stima del parametro (PEKF uniforme, $\mu = 3$)

	EKF(stima uniforme)	EKF(stima gaussiana)	PEKF(stima uniforme), $\mu = 2$
$\sigma_{\hat{x}_1}^2$	$3.60 \cdot 10^{-2}$	$1.70 \cdot 10^{-2}$	$2.07 \cdot 10^{-2}$
$\sigma_{\hat{\alpha}}^2$	$8.91 \cdot 10^{-2}$	$7.08 \cdot 10^{-3}$	$3.87 \cdot 10^{-3}$
	PEKF(stima gaussiana), $\mu = 2$	PEKF, $\mu = 3$	
$\sigma_{\hat{x}_1}^2$	$1.14 \cdot 10^{-2}$	$1.22 \cdot 10^{-2}$	
$\sigma_{\hat{\alpha}}^2$	$1.26 \cdot 10^{-3}$	$2.70 \cdot 10^{-3}$	

Considerando che la varianza dell'errore sull'uscita è $4.36 \cdot 10^{-2}$, si possono fare le seguenti considerazioni:

1. Il miglioramento che si ha nella stima dello stato prendendo lo stato stimato dall'EKF al posto dell'uscita è in media del 39 %.
2. Il filtro quadratico e cubico rispetto al filtro di Kalman esteso migliorano ulteriormente la stima dello stato del 39.4 % e del 53.9 %, rispettivamente.
3. Il filtro di Kalman esteso si dimostra totalmente inadeguato a stimare il parametro.
4. Il parametro è stimato molto meglio dai filtri *gaussiani*, che in media migliorano la stima del parametro del 79.7 % rispetto al filtro *uniforme* dello stesso ordine.
5. Il filtro di ordine 2 *gaussiano* è risultato stavolta il migliore nello stimare simultaneamente stato e parametro, migliorando la stima fatta dal filtro cubico *uniforme* rispettivamente del 6.6 % per lo stato e del 53.3 % per il parametro.

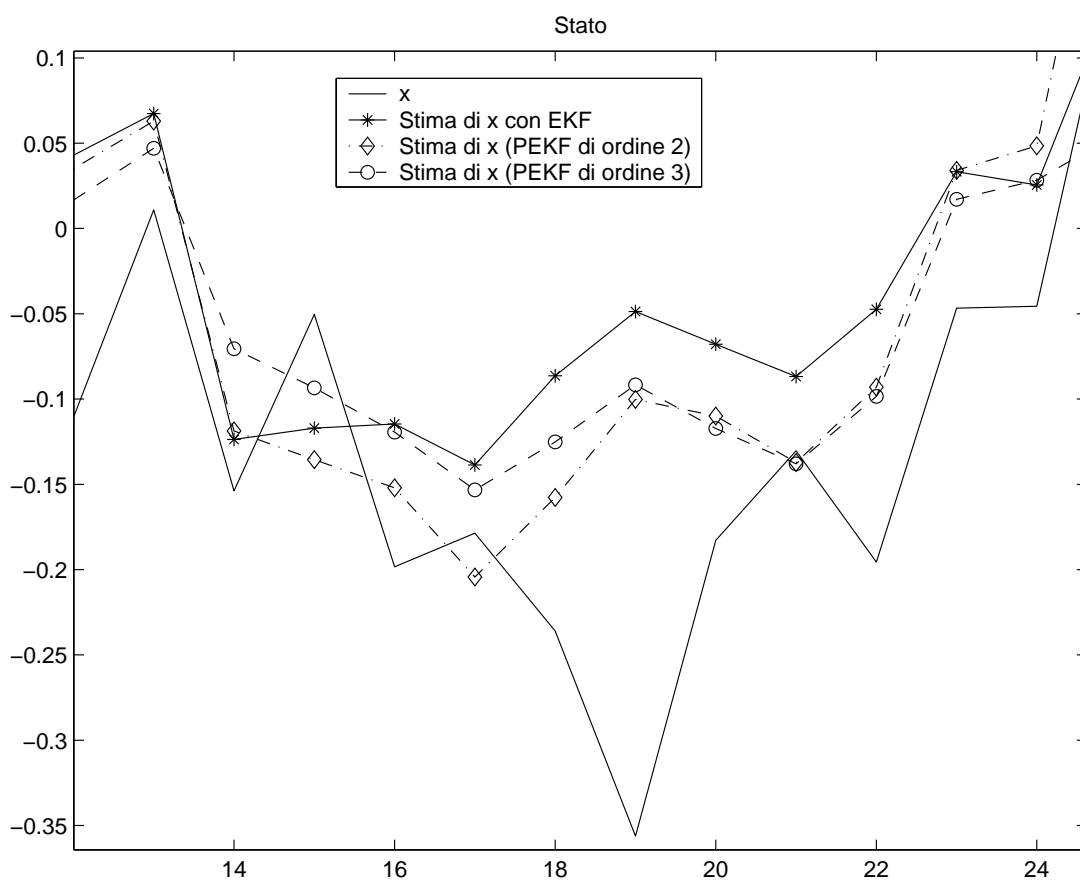


Figura 6.15: Simulazione 3: stima dello stato

Simulazione 3

Migliorando l'informazione a priori sul parametro, in particolare conoscendo almeno l'informazione sul suo segno, viene confermata l'aspettativa che indicava auspicabile un miglioramento della stima, in tutti i casi.

In particolare per la stima dello stato si ha l'andamento riportato in figura 6.15.

Riguardo alla stima del parametro, il filtro di Kalman esteso ha comunque un andamento poco soddisfacente (figure 6.16-6.17).

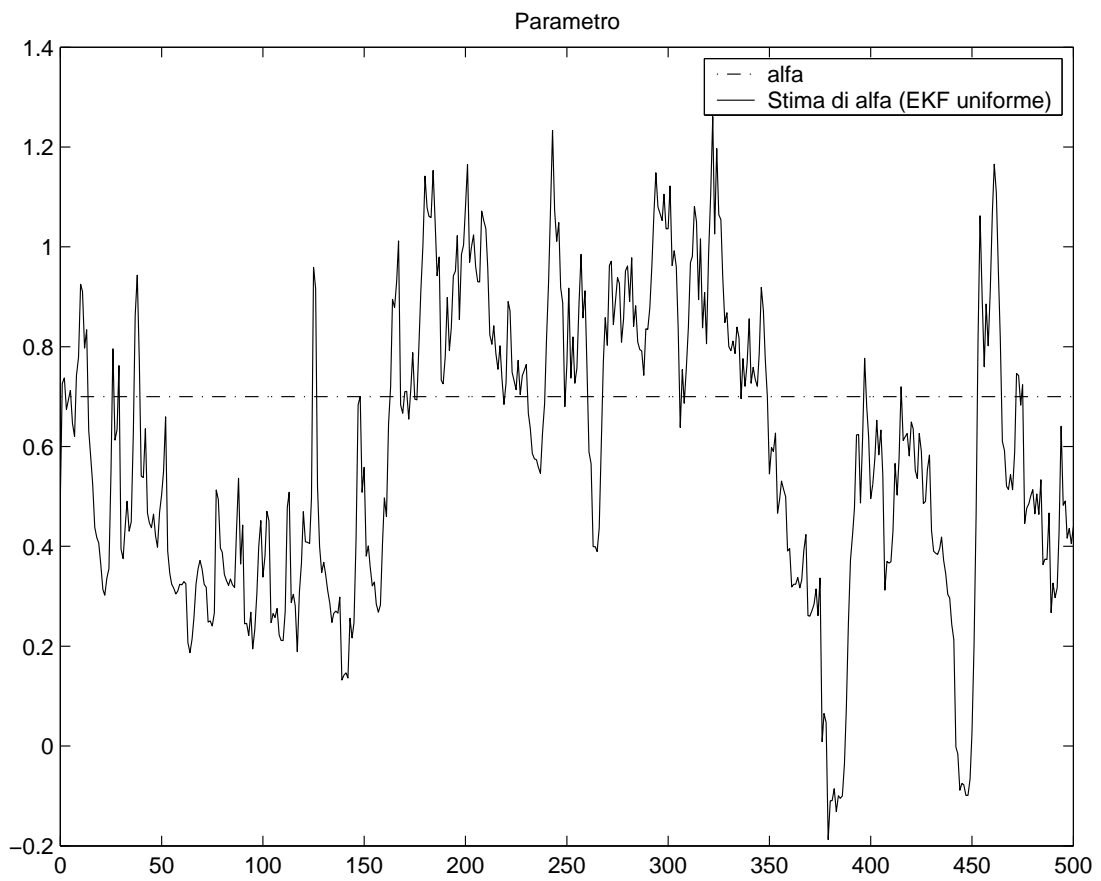


Figura 6.16: Simulazione 3: stima del parametro (EKF uniforme)

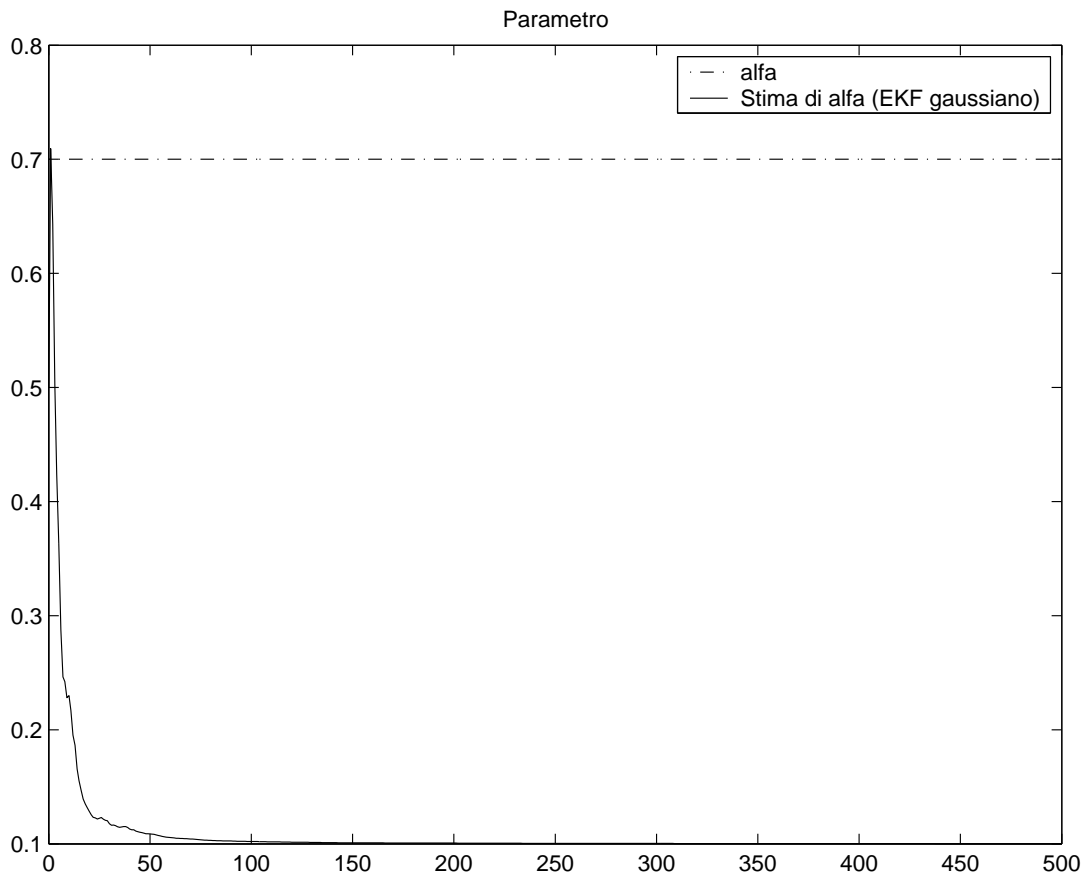


Figura 6.17: Simulazione 3: stima del parametro (EKF gaussiano)

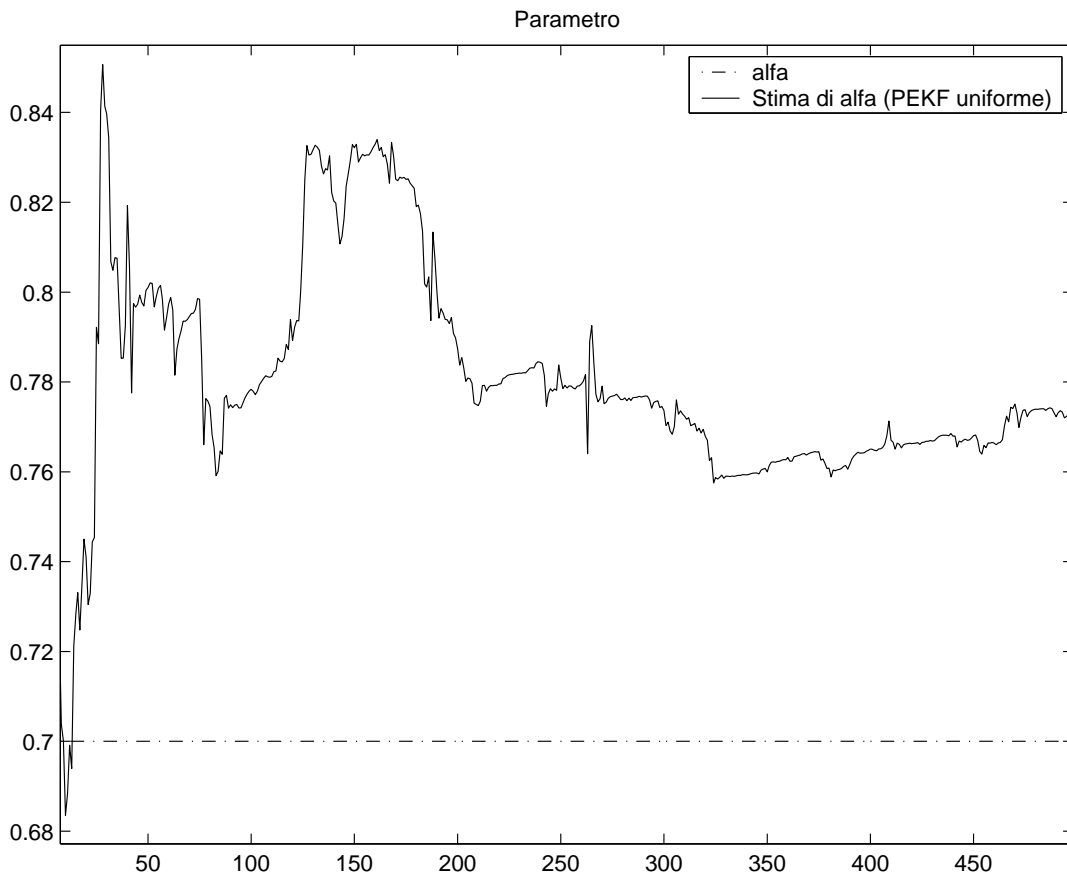


Figura 6.18: Simulazione 3: stima del parametro (PEKF uniforme, $\mu = 2$)

Miglioramenti notevoli sono visibili utilizzando i filtri quadratici (figure 6.18-6.19).

Una stima davvero precisa è fornita, però, solo dal filtro cubico come è mostrato in figura 6.20.

Le varianze si abbassano notevolmente rispetto alla simulazione precedente:

	EKF(stima uniforme)	EKF(stima gaussiana)	PEKF(stima uniforme), $\mu = 2$
$\sigma_{\hat{x}_1}^2$	$1.24 \cdot 10^{-2}$	$1.18 \cdot 10^{-2}$	$1.21 \cdot 10^{-2}$
$\sigma_{\hat{\alpha}}^2$	$8.57 \cdot 10^{-2}$	$2.56 \cdot 10^{-3}$	$2.35 \cdot 10^{-3}$

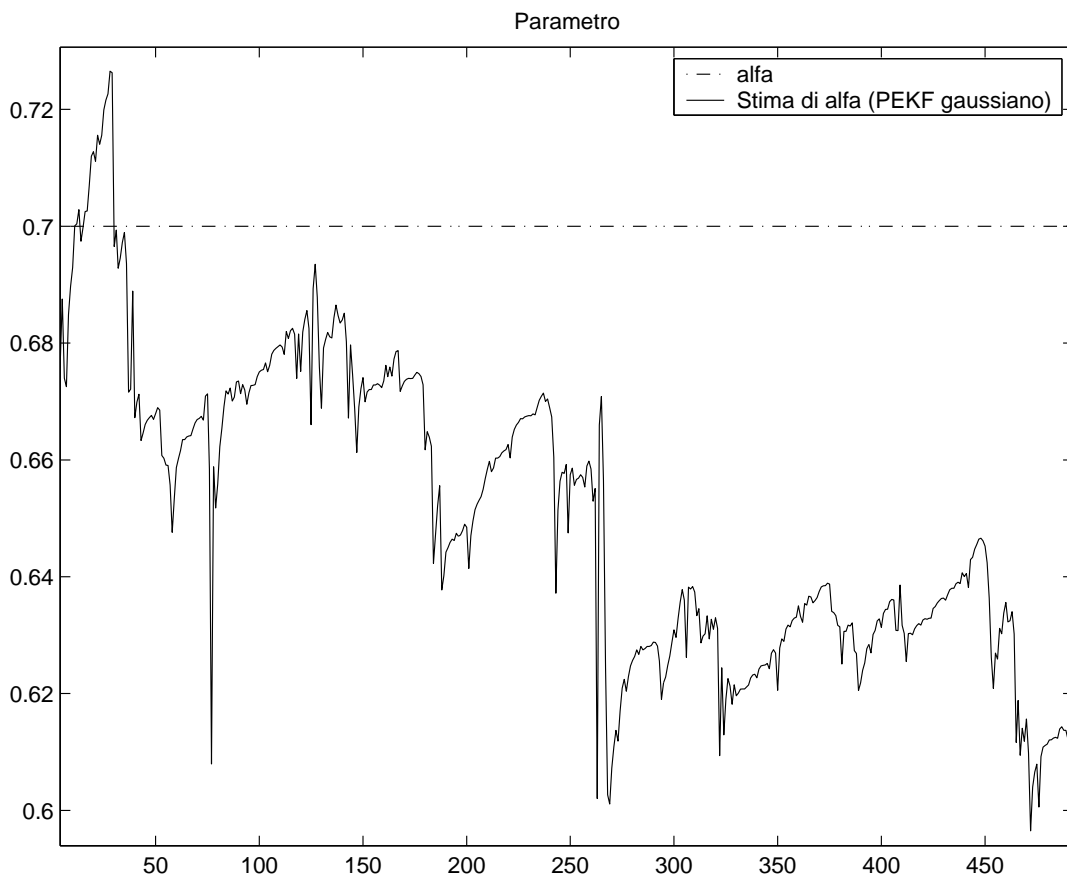


Figura 6.19: Simulazione 3: stima del parametro (PEKF gaussiano, $\mu = 2$)

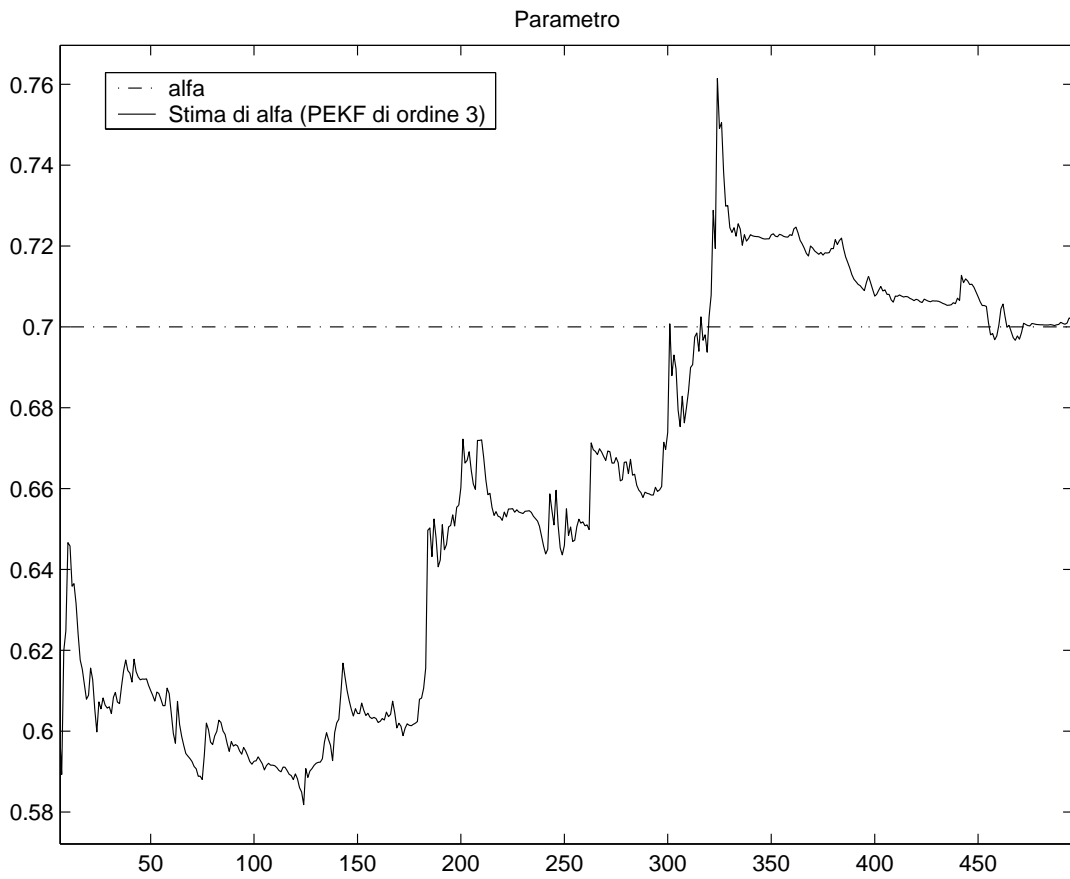


Figura 6.20: Simulazione 3: stima del parametro (PEKF uniforme, $\mu = 3$)

	PEKF(stima gaussiana), $\mu = 2$	PEKF, $\mu = 3$
$\sigma_{\hat{x}_1}^2$	$1.13 \cdot 10^{-2}$	$1.11 \cdot 10^{-2}$
$\sigma_{\hat{\alpha}}^2$	$8.30 \cdot 10^{-4}$	$7.20 \cdot 10^{-4}$

Considerando che la varianza dell'errore sull'uscita è $4.18 \cdot 10^{-2}$, si possono trarre le seguenti conclusioni:

1. Il miglioramento che si ha nella stima dello stato prendendo lo stato stimato dall'EKF al posto dell'uscita è in media del 71 %.
2. Il filtro quadratico e cubico rispetto al filtro di Kalman esteso migliorano ulteriormente la stima dello stato del 3.3 % e dell' 8.3 %, rispettivamente.
3. Il filtro di Kalman esteso si dimostra inadeguato a stimare il parametro.
4. Il parametro è stimato molto meglio dai filtri *gaussiani*, che in media migliorano la stima del parametro del 80.9 % rispetto al filtro *uniforme* dello stesso ordine.
5. Il filtro di ordine 3 ha avuto il miglior comportamento nello stimare simultaneamente stato e parametro, migliorando la stima fatta dal filtro quadratico *gaussiano* rispettivamente dell' 1.7 % per lo stato e del 13.2 % per il parametro.

Simulazione 4

Restringendo ulteriormente l'intervallo di variazione possibile del parametro, la stima simultanea di stato e parametri migliora ancora.

La stima dello stato ha l'andamento di figura 6.21.

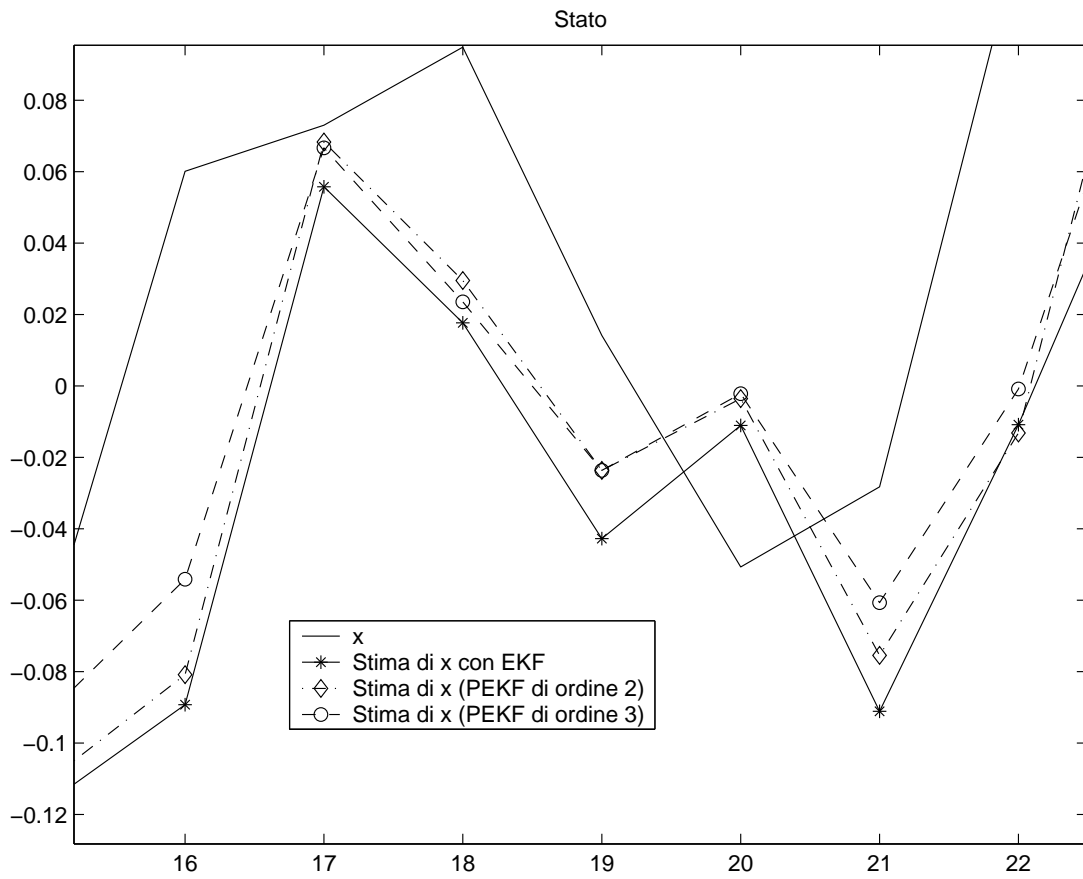


Figura 6.21: Simulazione 4: stima dello stato

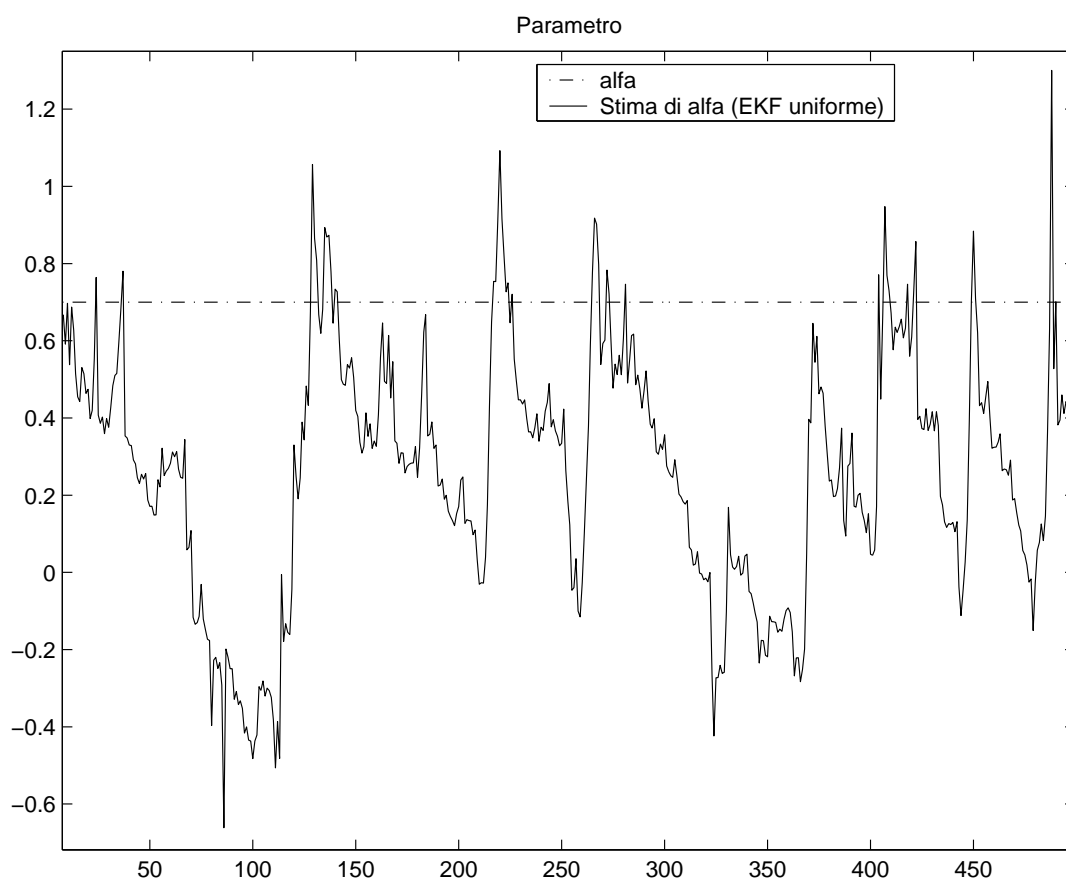


Figura 6.22: Simulazione 4: stima del parametro (EKF uniforme)

Riguardo alla stima del parametro, il filtro di Kalman esteso ha un miglioramento delle prestazioni rispetto ai casi precedenti, anche se nel complesso la stima rimane insoddisfacente (figure 6.22-6.23).

Molto positive sono le stime fornite dai filtri di ordine 2 (figure 6.24-6.25).

Ancora una volta, la stima migliore del parametro è quella fornita dal filtro cubico, che raggiunge in questo caso una prestazione eccellente (figura 6.26).

Le varianze, che si abbassano ulteriormente rispetto al caso precedente, sono le seguenti:

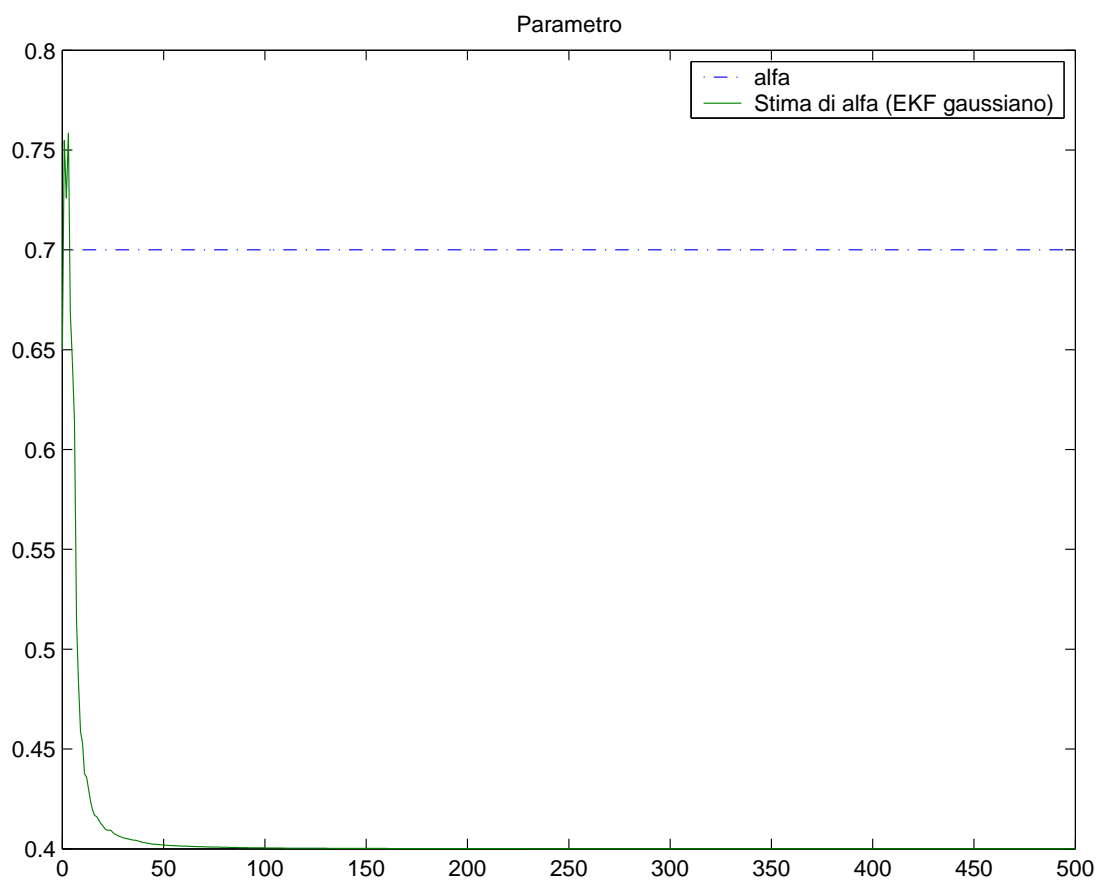


Figura 6.23: Simulazione 4: stima del parametro (EKF gaussiano)

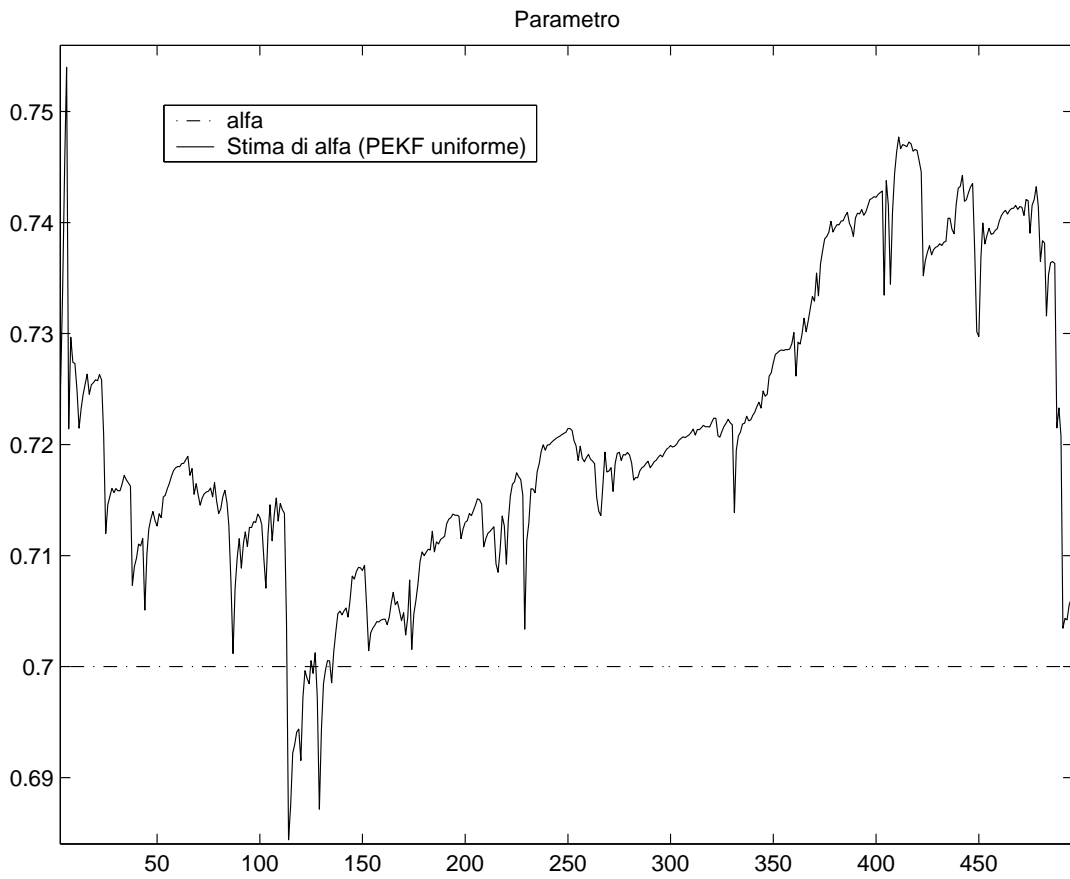


Figura 6.24: Simulazione 4: stima del parametro (PEKF uniforme, $\mu = 2$)

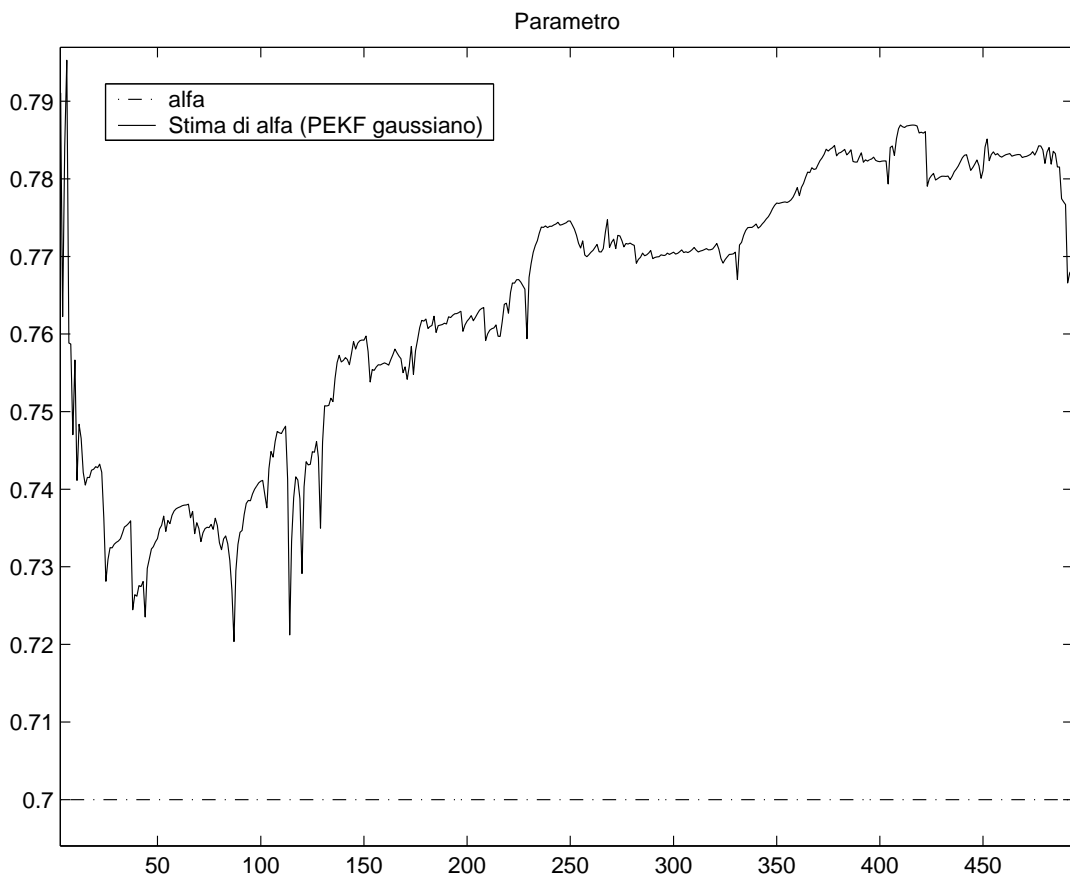


Figura 6.25: Simulazione 4: stima del parametro (PEKF gaussiano, $\mu = 2$)

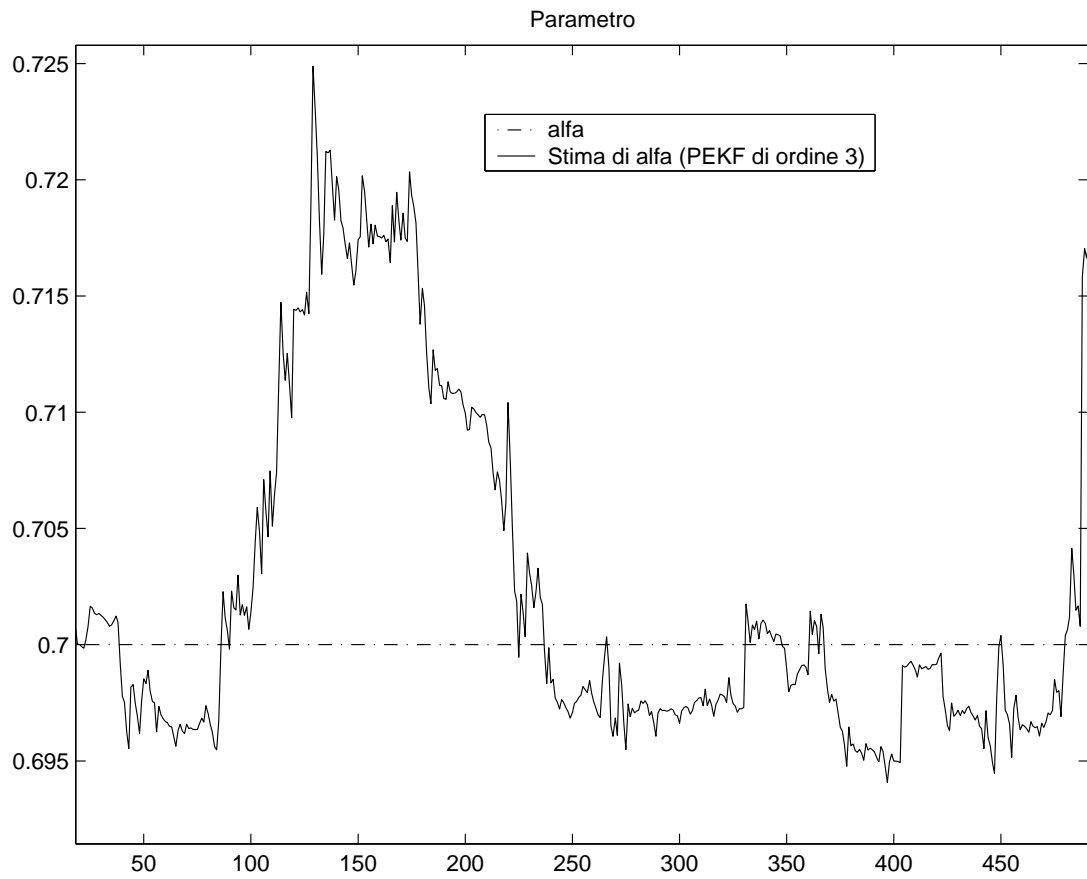


Figura 6.26: Simulazione 4: stima del parametro (PEKF uniforme, $\mu = 3$)

	EKF(stima uniforme)	EKF(stima gaussiana)	PEKF(stima uniforme), $\mu = 2$
$\sigma_{\hat{x}_1}^2$	$1.21 \cdot 10^{-2}$	$1.51 \cdot 10^{-2}$	$1.10 \cdot 10^{-2}$
$\sigma_{\hat{\alpha}}^2$	$1.04 \cdot 10^{-2}$	$1.24 \cdot 10^{-3}$	$3.44 \cdot 10^{-4}$
	PEKF(stima gaussiana), $\mu = 2$	PEKF, $\mu = 3$	
$\sigma_{\hat{x}_1}^2$	$1.08 \cdot 10^{-2}$	$1.05 \cdot 10^{-2}$	
$\sigma_{\hat{\alpha}}^2$	$1.91 \cdot 10^{-4}$	$7.27 \cdot 10^{-5}$	

La varianza dell'errore sull'uscita è pari a $4.53 \cdot 10^{-2}$, quindi si possono fare le seguenti considerazioni:

1. L'uso del filtro di Kalman esteso per stimare lo stato in luogo dell'uscita porta mediamente a un miglioramento nella stima dello stato del 70 %.
2. Il filtro quadratico e cubico rispetto al filtro di Kalman esteso migliorano ulteriormente la stima dello stato rispettivamente del 19.8 % e del 22.8 %.
3. Nonostante un miglioramento nella stima, il filtro di Kalman esteso non stima ancora il parametro in modo accettabile.
4. Il parametro è stimato molto meglio dai filtri *gaussiani*, che in media migliorano la stima del parametro del 66.2 % rispetto al filtro *uniforme* dello stesso ordine.
5. Il filtro di ordine 3 è il migliore nello stimare stato e parametro, con valori delle varianze inferiori rispettivamente dell' 2.8% per lo stato e del 61.9 % per il parametro rispetto al filtro quadratico *gaussiano*.

6.4 Conclusioni

Guardando nel complesso le simulazioni svolte, si può giungere quindi alle seguenti conclusioni di carattere generale:

- Il problema della stima simultanea di stato e parametri è critico soprattutto per quanto riguarda la stima del parametro.
- La bontà della stima, in special modo per il parametro, dipende strettamente dal grado di informazione che si ha a priori su di esso. Infatti riducendo la lunghezza dell'intervallo $[\alpha_m, \alpha_M]$ dal valore iniziale 1.8 al valore 0.8 (-56%) e poi al valore 0.5 (-72%), le stime migliorano in media del 25% e del 64%, rispettivamente.
- In particolare l'informazione a priori sul segno del parametro, intervenuta a partire dalla terza simulazione, si rivela fondamentale per avere una stima soddisfacente.
- Gli stimatori migliori si sono dimostrati essere il filtro polinomiale di ordine 3, con stima del parametro secondo il metodo *uniforme*, e il filtro polinomiale di ordine 2 con stima *gaussiana*. In particolare il primo si è dimostrato soddisfacente soprattutto nelle ultime simulazioni, in cui l'informazione a priori era maggiore.
- Il filtro di Kalman esteso, pur fornendo una buona stima dello stato, si rivela totalmente insoddisfacente riguardo alla stima del parametro.
- Il filtro polinomiale, oltre a migliorare la stima dello stato rispetto all'EKF, rivela tutta la sua utilità nella stima del parametro, in cui si dimostra eccel-

lente specialmente in presenza di sufficienti informazioni a priori, come il segno del parametro.

- I filtri del tipo *gaussiano*, a fronte di una maggiore complessità computazionale (vedi capitolo 4), si dimostrano superiori ai filtri *uniformi* di pari ordine, risultando a volte all'altezza di filtri uniformi di grado appena superiore. Ad esempio, in alcune simulazioni, l'EKF gaussiano di dimostra superiore al PEKF uniforme di ordine 2.
- Si può intuire che la costruzione di un filtro di ordine 3 *gaussiano* avrebbe fornito stime ancora migliori di quelle ottenute, ripetendo i test svolti.
- Un'analisi attenta delle varianze mostra che, in quasi tutte le simulazioni, ad una stima buona del parametro corrisponde una stima buona per lo stato, fatto abbastanza prevedibile, tenendo conto del legame che c'è tra le 2 grandezze nell'espressione dell'evoluzione dello stato e considerando che si tratta di una stima simultanea.

Appendice A

Cenni di algebra di Kronecker

Nell'approssimazione di Carleman, descritta nel capitolo 2, e nel filtro polinomiale, viene fatto largo uso delle potenze di Kronecker. In questa appendice vengono trattati in modo più esaustivo gli operatori prodotto di Kronecker e potenza di Kronecker, insieme ad alcune loro proprietà notevoli.

Inoltre vengono enunciati con precisione i lemmi che, nella trattazione dell'approssimazione di Carleman, sono stati appena accennati al fine di non appesantire il discorso.

1. Il prodotto di Kronecker e l'operatore stack

Definizione 1 Siano M e N matrici rispettivamente di dimensione $(r \times s)$ e $(p \times q)$. Si definisce prodotto di Kronecker tra le matrici M e N , e si indica con la notazione $M \otimes N$, la matrice di dimensione $(r \cdot p) \times (s \cdot q)$ così definita

$$M \otimes N = \begin{bmatrix} m_{11}N & \cdot & \cdot & \cdot & M_{1s}N \\ \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & & \cdot & & \\ \cdot & & & \cdot & \\ m_{r1}N & \cdot & \cdot & \cdot & m_{rs}N \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.1})$$

Si noti che il prodotto di Kronecker non è commutativo.

Definizione 2 Sia data la matrice

$$S = \begin{bmatrix} s_1 & \cdot & \cdot & \cdot & s_n \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.2})$$

di dimensione $(m \times n)$, in cui sono indicate con $s_i, i = 1, \dots, n$, le colonne di

S .

Si definisce stack della matrice S , e si indica con $st(S)$, il vettore, di dimensione $(m \cdot n)$, così definito:

$$st(S) = \begin{bmatrix} s_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ s_n \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.3})$$

Si nota che che l'operatore inverso, $st^{-1}(S)$ è univocamente definito solo se si precisano il numero di righe e di colonne di S .

In mancanza di tale precisazione, la matrice si considera quadrata.

2. Proprietà del prodotto di Kronecker

$$1. A \otimes (\alpha B) = \alpha(A \otimes B) \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$(\alpha A) \otimes B = \alpha(A \otimes B) \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$2. (A \otimes B) \neq (B \otimes A)$$

$$3. (A + B) \otimes (C + D) = A \otimes C + A \otimes D + B \otimes C + B \otimes D$$

$$4. A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C$$

$$5. (A \cdot C) \otimes (B \cdot D) = (A \otimes B) \cdot (C \otimes D)$$

$$6. (A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$$

$$7. (A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$$

$$8. \operatorname{tr}(A \otimes B) = \operatorname{tr}(A) \cdot \operatorname{tr}(B)$$

dove si indica con $\operatorname{tr}(\cdot)$ la traccia di una matrice.

$$9. \det(A_{n \times n} \otimes B_{m \times m}) = \det(A)^m \cdot \det(B)^n$$

$$10. x \otimes y = C_{n,m}^T (y \otimes x) \quad \text{dove } C_{n,m}^T \text{ è un'opportuna matrice di commutazione.}$$

3. Proprietà dell'operatore stack

$$1. \operatorname{st}(x) = x \quad x \in \mathbb{R}^n$$

$$2. \operatorname{st}(A \cdot x) = A \cdot x \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, x \in \mathbb{R}^n$$

$$3. \operatorname{tr}(A \cdot B) = (\operatorname{st}(A^T))^T \operatorname{st}(B).$$

4. Altre proprietà

$$1. \text{st}(A \cdot B \cdot C) = (C^T \otimes A) \cdot \text{st}(B)$$

$$2. x \otimes y = \text{st}(y \cdot x^T).$$

5. Potenze di Kronecker

Data una matrice A , di dimensioni $(m \times n)$, si definisce *potenza i -esima di Kronecker* come

$$A^{[0]} = 1 \tag{A.5.1}$$

$$A^{[i]} = A \otimes A^{[i-1]} \quad i \geq 1 \tag{A.5.2}$$

6. Potenza di polinomi

Si consideri un multiindice $t = \{t_0, t_1, \dots, t_\nu\} \in \mathbb{N}^{\nu+1}$; si definisce modulo del multiindice, indicato con $|t|$, la somma delle sue componenti: $|t| = t_0 + t_1 + \dots + t_\nu$.

La potenza i -esima di Kronecker della somma di $\nu + 1$ vettori $z_i \in \mathbb{R}^p$, con $i = 0, 1, \dots, \nu$, si può esprimere come

$$(z_0 + z_1 + \dots + z_\nu)^{[i]} = \sum_{|t|=i} M_t^p(z_0^{[t_0]} \otimes z_1^{[t_1]} \otimes \dots \otimes z_\nu^{[t_\nu]}). \tag{A.6.1}$$

con M_t^p opportuni coefficienti matriciali.

Definendo prodotto ordinato di Kronecker di n matrici A_h , $h = 1, \dots, n$ come

$$\prod_{h=1}^n A_h = A_1 \otimes A_2 \otimes \dots \otimes A_n \quad (\text{A.6.2})$$

la formula A.6.1 si scrive, in modo più compatto, come

$$\left(\sum_{h=0}^{\nu} z_h \right)^{[i]} = \sum_{|t|=i} M_t^p \prod_{h=0}^{\nu} z_h^{[t_h]} . \quad (\text{A.6.3})$$

7. Sviluppo polinomiale

L'espansione in serie di una funzione vettoriale $f(x)$ intorno al generico punto \tilde{x} si può scrivere come

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} (\nabla_x^{[i]} \otimes f(\tilde{x})) (x - \tilde{x})^{[i]} \quad (\text{A.7.1})$$

dove l'operatore $(\nabla_x^{[i]} \otimes)$ è definito come

$$\nabla_x^{[0]} \otimes f(x) = f(x) \quad (\text{A.7.2})$$

$$\nabla_x^{[i+1]} \otimes f(x) = \nabla_x \otimes \nabla_x^{[i]} \otimes f(x) \quad i \geq 1 \quad (\text{A.7.3})$$

con $\nabla_x = \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial}{\partial x_n} \right]$.

Si indica con $[f]_{\mu}(x, \tilde{x})$ si indica l'approssimazione di ordine μ di $f(x)$, ottenibile arrestando il suo sviluppo in serie alla potenza μ -esima.

Analogamente, la potenza m -esima di Kronecker di $f(x)$ si sviluppa nel modo seguente:

$$f^{[m]}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} (\nabla_x^{[i]} \otimes f^{[m]}(\tilde{x})) (x - \tilde{x})^{[i]} \quad (\text{A.7.4})$$

e la sua approssimazione di grado μ si indica con $[f^{[m]}]_{\mu}(x, \tilde{x})$.

8. Lemmi (non dimostrati)

Lemma 1 Risulta verificata la seguente uguaglianza

$$[f^{[m]}]_{\mu}(x, \tilde{x}) = [[f]_{\mu}^{[m]}]_{\mu}(x, \tilde{x}) . \quad (\text{A.8.1})$$

Lemma 2 Sia $g(\cdot)$ una funzione non lineare $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ e siano x e y vettori aleatori a valori, rispettivamente, in \mathbb{R}^n e in \mathbb{R}^p . Si ipotizzi che y sia a media nulla e che abbia momenti finiti fino all'ordine μ -esimo.

Considerando il vettore aleatorio β definito come $\beta = g(x) + y$, si ha:

$$[\beta^{[m]}]_{\mu} = [[\beta]_{\mu}^{[m]}]_{\mu} . \quad (\text{A.8.2})$$

Per approfondimenti, si vedano [4] , [5].

Appendice B

Codice MATLAB

Sistema

```
% Sistema.m
% Questo file contiene la simulazione del sistema in esame

clear;

% numero di istanti di simulazione

T=500;

% in alcune simulazioni viene analizzato un numero minore
% di istanti

T_ridotto=T/10;
```

```
n=2; % dimensione dello spazio di stato dopo
      % l'inclusione del parametro

q=1; % dimensione dell'uscita

alfa=0.7; % valore del parametro

% seguono i momenti del rumore di stato e del
% rumore di osservazione

mv1=0;
mv2=0.01;
mv3=0;
mv4=0.0003;
mv5=0;
mv6=1.5001e-5;

mw1=0;
mw2=0.04;
mw3=0;
mw4=0.0048;
mw5=0;
mw6=0.00096;

%seguono media e varianza dello stato iniziale
```

```
mx=1;
covx=1;

%x=sqrt(covx)*randn(1,1)+mx;
x=1.2; % valore dello stato iniziale

X=zeros(1,T+1);
Y=X;

% simulazione del sistema per T passi

for k=0:T

    X(:,k+1)=x;

    w=sqrt(mw2)*randn(1,1);

    y=x+w;

    Y(:,k+1)=y;

    v=sqrt(mv2)*randn(1,1);

    x=alfa*x+v;
```

```
end
```

```
save sistema;
```

Parametri dei filtri

```
% Parametri_filtro.m
```

```
% Questo file contiene i parametri piu' importanti
```

```
% utilizzati nelle simulazioni
```

```
load sistema;
```

```
% momenti fino all'ordine 6 dello stato iniziale
```

```
%(calcolati preventivamente)
```

```
mx01=mx; covx01=covx; mx012=covx01+(mx01)^2; mx013=4; mx014=10;
```

```
mx015=26; mx016=76;
```

```
% momenti fino all'ordine 4 della variabile aleatoria x2(0)
```

```
% (solo per il caso gaussiano)
```

```
mx02=0;
```

```
mx022=1;
```

```
mx023=0;  
mx024=3;  
covx02=mx022-(mx02)^2;  
  
% estremi dell'intervallo in cui puo' variare il parametro  
  
a_M=0.9;  
a_m=-0.9;
```

Filtro di Kalman esteso (metodo uniforme)

```
% EKF_uniforme.m  
% Questo file contiene l'implementazione del filtro di  
% Kalman esteso con stima del parametro  
% secondo la metodologia "uniforme"  
  
clear;  
  
% caricamento dei parametri del filtro  
  
Parametri_filtro;  
  
% momenti fino all'ordine 2 di x2(0)
```

```
mx02=(a_M+a_m)/2;
mx022=(a_M^3-a_m^3)/(3*(a_M-a_m));
covx02=mx022-(mx02)^2;

% inizializzazione del filtro

C=[1 0];

mx0=[mx01;
     mx02];

Covx0=[covx01 0;
       0 covx02];

PsiV=mv2;

PsiW=mw2;

Xh=zeros(n,T+1);

Xp=Xh;

Yp=zeros(q,T+1);

xp=mx0;
```

```
Pp=Covx0;  
  
% segue l'algoritmo del filtro di Kalman esteso  
  
for k=0:T  
  
    Xp(:,k+1)=xp;  
  
    y=Y(:,k+1);  
  
    yp=C*xp;  
  
    Yp(:,k+1)=yp;  
  
    K=Pp*C'*inv(C*Pp*C'+PsiW);  
  
    xh=xp+K*(y-yp);  
  
    Xh(:,k+1)=xh;  
  
    P=(eye(n)-K*C)*Pp;  
  
    xp=[xh(1,:)*xh(2,:);  
        xh(2,:)];
```

```
A=[xh(2,:) xh(1,:);
   0 1];

Pp=A*P*A'+PsiV;

end

% calcolo degli errori

Alfa=alfa*ones(1,T+1);

Alfah=Xh(2,:);

ErrX1u=X-Y;

ErrX1=X-Xh(1,:);

ErrX2=Alfa-Alfah;

CovErrX1u=Cov(ErrX1u);

% calcolo delle covarianze campionarie

CovErrX1=Cov(ErrX1);
```



```
CovErrX2=Cov(ErrX2);

% fase di stampa

T_ridotto=T/10;
Tempi=0:T;
Tempi_ridotto=0:T_ridotto;

figure(1);
    plot (Tempi_ridotto,X(1,1:T_ridotto+1),Tempi_ridotto,
          Y(1,1:T_ridotto+1),Tempi_ridotto,Xh(1,1:T_ridotto+1));
    legend('x','y','Stima di x');
    title('Stato');

figure(2);
    plot (Tempi,Alfa(1,:),Tempi,Alfah(1,:));
    legend('alfa','Stima di alfa');
    title('Parametro');
```

Filtro di Kalman esteso (metodo gaussiano)

```
% EKF_gaussiano.m
% Questo file contiene l'implementazione del filtro di
```

```
% Kalman esteso con stima del parametro
% secondo la metodologia "gaussiana"

clear;

% caricamento dei parametri del filtro

Parametri_filtro;

a=(a_M+a_m)/2;
b=(a_M-a_m)/2;

C=[1 0];

% inizializzazione del filtro

mx0=[mx01;
     mx02];

Covx0=[covx01 0;
       0 covx02];

PsiV=mv2;

PsiW=mw2;
```

```
Xh=zeros(n,T+1);
```

```
Xp=Xh;
```

```
Yp=zeros(q,T+1);
```

```
xp=mx0;
```

```
Pp=Covx0;
```

```
% segue l'algoritmo del filtro di Kalman esteso
```

```
for k=0:T
```

```
    Xp(:,k+1)=xp;
```

```
    y=Y(:,k+1);
```

```
    yp=C*xp;
```

```
    Yp(:,k+1)=yp;
```

```
    K=Pp*C'*inv(C*Pp*C'+PsiW);
```

```
xh=xp+K*(y-yp);

Xh(:,k+1)=xh;

P=(eye(n)-K*C)*Pp;

xp=[a+b*xh(2,:)*xh(1,:)/sqrt(1+xh(2,:)^2);
    xh(2,:)];

A=[a+b*xh(2,:)/sqrt(1+xh(2,:)^2)
    b*xh(1,:)/sqrt(1+xh(2,:)^2)-b*xh(1,:)*
    xh(2,:)^2/(1+xh(2,:)^2)^(3/2);
    0    1];

Pp=A*P*A'+PsiV;

end

% calcolo degli errori

Alfa=alfa*ones(1,T+1);

Alfah=zeros(1,T+1);

for k=0:T
```

```
    Alfah(:,k+1)=a+b*Xh(2,k+1)/sqrt(1+Xh(2,k+1)^2);

end

ErrX1u=X-Y;

ErrX1=X-Xh(1,:);

ErrX2=Alfa-Alfah;

CovErrX1u=Cov(ErrX1u);

% calcolo delle covarianze campionarie

CovErrX1=Cov(ErrX1);

CovErrX2=Cov(ErrX2);

% fase di stampa

T_ridotto=T/10;
Tempi=0:T;
Tempi_ridotto=0:T_ridotto;
```

```
figure(1);  
    plot (Tempi_ridotto,X(1,1:T_ridotto+1),Tempi_ridotto,  
          Y(1,1:T_ridotto+1),Tempi_ridotto,Xh(1,1:T_ridotto+1));  
    legend('x','y','Stima di x');  
    title('Stato');  
  
figure(2);  
    plot (Tempi,Alfa(1,:),Tempi,Alfah(1,:));  
    legend('alfa','Stima di alfa');  
    title('Parametro');
```

Filtro di Kalman quadratico esteso (metodo uniforme)

```
% PEKF_uniforme.m  
% Questo file contiene l'implementazione del filtro di Kalman  
% polinomiale esteso di ordine 2 con stima  
% del parametro secondo la metodologia "uniforme"  
  
clear;  
  
% caricamento dei parametri del filtro  
  
Parametri_filtro;
```

```
% momenti fino all'ordine 4 di x2(0)

mx02=(a_M+a_m)/2;
mx022=(a_M^3-a_m^3)/(3*(a_M-a_m));
mx023=(a_M^4-a_m^4)/(4*(a_M-a_m));
mx024=(a_M^5-a_m^5)/(5*(a_M-a_m));
covx02=mx022-(mx02)^2;

Ce=[1 0 0 0 0;
    0 0 1 0 0;];

n_2=5; % dimensione dello stato esteso

q_2=2; % dimensione dell'uscita estesa

% inizializzazione del filtro

mxe0=[mx01;
      mx02;
      mx012;
      mx01*mx02;
      mx022;];

Covxe0=[covx01 0 mx013-mx01*mx012 mx012*mx02-(mx01)^2*mx02 0;
```

```

0      covx02 0 mx01*mx022-(mx02)^2*mx01 mx023-mx02*mx022;
mx013-mx01*mx012 0 mx014-(mx012)^2
mx013*mx02-mx012*mx01*mx02 0;
mx012*mx02-(mx01)^2*mx02  mx01*mx022-(mx02)^2*mx01
mx013*mx02-mx012*mx01*mx02  mx012*mx022-(mx01*mx02)^2
mx01*mx023-mx01*mx02*mx022;
0 mx023-mx02*mx022  0  mx01*mx023-mx01*mx02*mx022
mx024-(mx022)^2;];

Psixe0=[mx012 mx01*mx02 mx013 mx012*mx02 mx01*mx022;
mx01*mx02 mx022 mx012*mx02 mx01*mx022 mx023;
mx013 mx012*mx02 mx014 mx013*mx02 mx012*mx022;
mx012*mx02 mx01*mx022 mx013*mx02 mx012*mx022 mx01*mx023;
mx01*mx022 mx023 mx012*mx022 mx01*mx023 mx024;];

Xeh=zeros(n_2,T+1);
Xep=Xeh;

Yep=zeros(q_2,T+1);

xep=mxe0;
Ppe=Covxe0;

mxe=mxe0;
Psixe=Psixe0;

```



```
% segue l'algoritmo del filtro di Kalman polinomiale esteso

for k=0:T

    Xep(:,k+1)=xep;

    Gamma=[0 ; mw2];

    PsiW=[          mw2          2*mw2*mxe(1,:)          ;
          2*mw2*mxe(1,:)  mw4-mw2^2+4*mw2*Psixe(1,1)];

    y=Y(:,k+1);

    ye=[y;y^2];

    yep=Ce*xep+Gamma;

    Yep(:,k+1)=yep;

    Ke=Ppe*Ce'*inv(Ce*Ppe*Ce'+PsiW);

    Pe=(eye(n_2)-Ke*Ce)*Ppe;

    xeh=xep+Ke*(ye-yep);
```

```
Xeh(:,k+1)=xeh;
```

```
xelh=xeh(1,:);
```

```
xe2h=xeh(2,:);
```

```
Ae=[      0      0      0
      1      0      ;
      0      1      0
      0      0      ;
      (-4*xelh*xe2h^2) (-4*xelh^2*xe2h) (xe2h^2)
      (4*xelh*xe2h) (xelh^2);
      (-xe2h^2)      (-2*xelh*xe2h)      0
      (2*xe2h)      (xelh)      ;
      0      0      0
      0      1      ;];
```

```
Ue=[      0      ;
      0      ;
      3*xelh^2*xe2h^2+mv2;
      xelh*xe2h^2      ;
      0      ;];
```

```
PsiV=[      mv2      0      2*mv2*mxe(4,:)
```

```

        mv2*mxe(2,:)    0;
            0            0            0
            0            0;
2*mv2*mxe(4,:) 0    mv4-mv2^2+4*mv2*Psixe(4,4)
2*mv2*Psixe(2,4)  0;
mv2*mxe(2,:)    0    2*mv2*Psixe(2,4)
mv2*Psixe(2,2)  0;
            0            0            0
            0            0;];

xep=Ae*xeh+Ue;

Ppe=Ae*Pe*Ae'+PsiV;

Psixe=Ae*Psixe*Ae'+Ue*Ue'+PsiV+Ae*mxe*Ue'+Ue*mxe'*Ae';

mxe=Ae*mxe+Ue;

end

% calcolo degli errori

Alfa=alfa*ones(1,T+1);

Alfah=Xeh(2,:);

```

```
ErrX1u=X-Y;

ErrX1=X-Xeh(1,:);

ErrX2=Alfa-Alfah;

CovErrX1u=Cov(ErrX1u);

% calcolo delle covarianze campionarie

CovErrX1=Cov(ErrX1);

CovErrX2=Cov(ErrX2);

% fase di stampa

T_ridotto=T/10;
Tempi=0:T;
Tempi_ridotto=0:T_ridotto;

figure(1);
    plot (Tempi_ridotto,X(1,1:T_ridotto+1),Tempi_ridotto,
          Y(1,1:T_ridotto+1),Tempi_ridotto,Xeh(1,1:T_ridotto+1));
    legend('x','y','Stima di x');
```

```
title('Stato');

figure(2);
plot (Tempi,Alfa(1,:),Tempi,Alfah(1,:));
legend('alfa','Stima di alfa');
title('Parametro');
```

Filtro di Kalman quadratico esteso (metodo gaussiano)

```
% PEKF_gaussiano.m
% Questo file contiene l'implementazione del filtro di Kalman
% polinomiale esteso di ordine 2 con stima
% del parametro secondo la metodologia "gaussiana"

clear;

% caricamento dei parametri del filtro

Parametri_filtro;

a=(a_M+a_m)/2;
b=(a_M-a_m)/2;
```

```

Ce=[1 0 0 0 0;
    0 0 1 0 0;];

n_2=5; % dimensione dello stato esteso

q_2=2; % dimensione dell'uscita estesa

% inizializzazione del filtro

mxe0=[mx01;
      mx02;
      mx012;
      mx01*mx02;
      mx022;];

Covxe0=[covx01 0 mx013-mx01*mx012 mx012*mx02-(mx01)^2*mx02 0;
        0 covx02 0 mx01*mx022-(mx02)^2*mx01 mx023-mx02*mx022;
        mx013-mx01*mx012 0 mx014-(mx012)^2
        mx013*mx02-mx012*mx01*mx02 0;
        mx012*mx02-(mx01)^2*mx02 mx01*mx022-(mx02)^2*mx01
        mx013*mx02-mx012*mx01*mx02 mx012*mx022-(mx01*mx02)^2
        mx01*mx023-mx01*mx02*mx022;
        0 mx023-mx02*mx022 0 mx01*mx023-mx01*mx02*mx022
        mx024-(mx022)^2;];

```

```
Psixe0=[mx012 mx01*mx02 mx013 mx012*mx02 mx01*mx022;  
        mx01*mx02 mx022 mx012*mx02 mx01*mx022 mx023;  
        mx013 mx012*mx02 mx014 mx013*mx02 mx012*mx022;  
        mx012*mx02 mx01*mx022 mx013*mx02 mx012*mx022 mx01*mx023;  
        mx01*mx022 mx023 mx012*mx022 mx01*mx023 mx024];
```

```
Xeh=zeros(n_2,T+1);
```

```
Xep=Xeh;
```

```
Yep=zeros(q_2,T+1);
```

```
xep=mxe0;
```

```
Ppe=Covxe0;
```

```
mxe=mxe0;
```

```
Psixe=Psixe0;
```

```
% segue l'algoritmo del filtro di Kalman polinomiale esteso
```

```
for k=0:T
```

```
    Xep(:,k+1)=xep;
```

```
    Gamma=[0 ; mw2];
```

```
PsiW=[          mw2          2*mw2*mxe(1,:)          ;
       2*mw2*mxe(1,:)  mw4-mw2^2+4*mw2*Psixe(1,1)];

y=Y(:,k+1);

ye=[y;y^2];

yep=Ce*xep+Gamma;

Yep(:,k+1)=yep;

Ke=Ppe*Ce'*inv(Ce*Ppe*Ce'+PsiW);

Pe=(eye(n_2)-Ke*Ce)*Ppe;

xeh=xep+Ke*(ye-yep);

Xeh(:,k+1)=xeh;

xe1h=xeh(1,:);
xe2h=xeh(2,:);

a0=sqrt(xe2h^2+1);
a11=a+b*xe2h^3/a0^3;
```



```

a12=3*b*xel1h*x2h^2/a0^5;
a14=b/a0^3;
a15=-3*b*xel1h*x2h/(2*a0^5);
gamma1=-3*b*xel1h*x2h^3/(2*a0^5);
a1=a+b*x2h/a0;
a31=a1*(-4*b*xel1h*x2h/a0^3);
a32=a1*((4*x2h^2-2)*b*xel1h^2)/a0^5-2*b^2*xel1h^2*x2h/a0^6;
a33=a1^2;
a34=a1*4*b*xel1h/a0^3;
a35=a1*(-3*b*xel1h^2*x2h/a0^5)+b^2*xel1h^2/a0^6;
gamma3=a1*((2-x2h^2)*b*xel1h^2*x2h/a0^5)+
        b^2*xel1h^2*x2h^2/a0^6+mv2;
a41=-b*x2h^2/a0^3;
a42=(x2h^2-2)*b*xel1h*x2h/a0^5;
a44=a+2*b*x2h/a0-b*x2h^3/a0^3;
a45=- (x2h^2-2)*b*xel1h/(2*a0^5);
gamma4=- (x2h^2-2)*b*xel1h*x2h^2/(2*a0^5);

Ae=[  a11 a12  0  a14 a15 ;
      0  1  0  0  0  ;
      a31 a32 a33 a34 a35 ;
      a41 a42 0 a44 a45 ;
      0  0  0  0  1  ;];

Ue=[  gamma1  ;

```

```

        0      ;
    gamma3    ;
        gamma4    ;
        0      ; ];

% vengono calcolati i termini che compaiono nella
% covarianza del rumore esteso di stato

m_n=(2*a+2*b*xe2h^3/a0^3)*mxe(1,:)+(6*b*xel1h*xe2h^2/
    a0^5)*mxe(2,:)+(2*b/a0^3)*mxe(4,:)-(3*b*xel1h*xe2h/
    a0^5)*mxe(5,):-3*b*xel1h*xe2h^3/a0^5;
m_vv3=mv2*m_n;
a2=a+b*xe2h^3/a0^3;
m_n2=a2*(-12*b*xel1h*xe2h^3/a0^5)*mxe(1,:)+(-36*b^2*
    xel1h^2*xe2h^5/a0^10)*
    mxe(2,:)+(-12*b^2*xel1h*xe2h^3/a0^8)*mxe(4,:)+
    (18*b^2*xel1h^2*xe2h^4/a0^10)*mxe(5,:)+(4*a^2+
    8*a*b*xe2h^3/a0^3+
    4*b^2*xe2h^6/a0^6)*Psixe(1,1)+a2*(24*b*xel1h*
    xe2h^2/a0^5)*Psixe(1,2)+a2*(8*b/a0^3)*Psixe(1,4)
    +a2*(-12*b*xel1h*xe2h/a0^5)*Psixe(1,5)+
    (36*b^2*xel1h^2*xe2h^4/a0^10)*Psixe(2,2)+(24*b^2*
    xel1h*xe2h^2/a0^8)*Psixe(2,4)+
    (-36*b^2*xel1h^2*xe2h^3/a0^10)*Psixe(2,5)+(4*b^2/
    a0^6)*Psixe(4,4)+

```

```

        (-12*b^2*xelh*xeh/a0^8)*Psixe(4,5)+(9*b^2*xelh^2*
        xeh^2/a0^10)*Psixe(5,5)+
        (9*b^2*xelh^2*xeh^6/a0^10);
m_v32=mv4-mv2^2+mv2*m_n2;
m_nx2=(2*a+2*b*xeh^3/a0^3)*Psixe(1,2)+(6*b*xelh*
        xeh^2/a0^5)*Psixe(2,2)+
        (2*b/a0^3)*Psixe(2,4)-(3*b*xelh*xeh/a0^5)*
        Psixe(2,5)-(3*b*xelh*xeh^3/a0^5)*mxe(2,:);
m_vv3x2=mv2*m_nx2;

PsiV=[
        mv2          0      m_vv3      mv2*mxe(2,:)      0;
          0          0          0          0          0;
        m_vv3          0      m_v32      m_vv3x2          0;
    mv2*mxe(2,:)      0      m_vv3x2      mv2*Psixe(2,2)  0;
          0          0          0          0          0];

xep=Ae*xeh+Ue;

Ppe=Ae*Pe*Ae'+PsiV;

Psixe=Ae*Psixe*Ae'+Ue*Ue'+PsiV+Ae*mxe*Ue'+Ue*mxe'*Ae';

mxe=Ae*mxe+Ue;

```

```
end

% calcolo degli errori

Alfa=alfa*ones(1,T+1);

Alfah=zeros(1,T+1);

for k=0:T

    Alfah(1,k+1)=a+b*Xeh(2,k+1)/sqrt(1+Xeh(2,k+1)^2);

end

ErrX1u=X-Y;

ErrX1=X-Xeh(1,:);

ErrX2=Alfa-Alfah;

CovErrX1u=Cov(ErrX1u);

% calcolo delle covarianze campionarie
```

```
CovErrX1=Cov(ErrX1);

CovErrX2=Cov(ErrX2);

% fase di stampa

T_ridotto=T/10;
Tempi=0:T;
Tempi_ridotto=0:T_ridotto;

figure(1);
    plot (Tempi_ridotto,X(1,1:T_ridotto+1),Tempi_ridotto,
          Y(1,1:T_ridotto+1),Tempi_ridotto,Xeh(1,1:T_ridotto+1));
    legend('x','y','Stima di x');
    title('Stato');

figure(2);
    plot (Tempi,Alfa(1,:),Tempi,Alfah(1,:));
    legend('alfa','Stima di alfa');
    title('Parametro');
```

Filtro di Kalman cubico esteso

```
% PEKF_cubico.m
% Questo file contiene l'implementazione del filtro di Kalman
% polinomiale esteso di ordine 3 con stima
% del parametro secondo la metodologia "uniforme"

clear;

% caricamento dei parametri del filtro

Parametri_filtro;

% momenti fino all'ordine 6 di x2(0)

mx02=(a_M+a_m)/2;
mx022=(a_M^3-a_m^3)/(3*(a_M-a_m));
mx023=(a_M^4-a_m^4)/(4*(a_M-a_m));
mx024=(a_M^5-a_m^5)/(5*(a_M-a_m));
covx02=mx022-(mx02)^2;
mx025=(a_M^6-a_m^6)/(6*(a_M-a_m));
mx026=(a_M^7-a_m^7)/(7*(a_M-a_m));

Ce=[1 0 0 0 0 0 0 0 0;
    0 0 1 0 0 0 0 0 0;
```

```

    0 0 0 0 0 1 0 0 0;];

n_3=9; % dimensione dello stato esteso

q_3=3; % dimensione dell'uscita estesa

% inizializzazione del filtro

mxe0=[mx01;
      mx02;
      mx012;
      mx01*mx02;
      mx022;
      mx013;
      mx012*mx02;
      mx01*mx022;
      mx023;];

Covxe0=[covx01 0 mx013-mx01*mx012 mx012*mx02-(mx01)^2*mx02 0
        mx014-mx01*mx013 mx013*mx02-mx01*mx012*mx02
        mx012*mx022-(mx01)^2*mx022 0;
        0 covx02 0 mx01*mx022-(mx02)^2*mx01
        mx023-mx02*mx022 0
        mx012*mx022-(mx02)^2*mx012 mx01*mx023-mx02*mx01*mx022
        mx024-mx02*mx023;

```

```

mx013-mx01*mx012 0 mx014-(mx012)^2 mx013*mx02-
mx012*mx01*mx02 0
mx015-mx012*mx013 mx014*mx02-(mx012)^2*mx02 mx013*mx022
-mx012*mx01*mx022 0;
mx012*mx02-(mx01)^2*mx02 mx01*mx022-(mx02)^2*mx01
mx013*mx02-mx012*mx01*mx02
mx012*mx022-(mx01*mx02)^2 mx01*mx023-mx01*mx02*mx022
mx014*mx02-mx01*mx02*mx013
mx013*mx022-mx01*mx012*mx02^2 mx012*mx023-
(mx01)^2*mx02*mx022
mx01*mx024-mx01*mx02*mx023;
0 mx023-mx02*mx022 0 mx01*mx023-mx01*mx02*mx022
mx024-(mx022)^2 0
mx012*mx023-mx022*mx012*mx02 mx01*mx024-mx01*(mx022)^2
mx025-mx022*mx023;
mx014-mx01*mx013 0 mx015-mx012*mx013 mx014*mx02-
mx01*mx02*mx013 0
mx016-mx013^2 mx015*mx02-mx013*mx012*mx02 mx014*mx022-
mx013*mx01*mx022 0;
mx013*mx02-mx01*mx012*mx02 mx012*mx022-(mx02)^2*mx012
mx014*mx02-(mx012)^2*mx02
mx013*mx022-mx01*mx02^2*mx012 mx012*mx023-mx022*
mx012*mx02 mx015*mx02-mx013*
mx012*mx02 mx014*mx022-(mx012*mx02)^2 mx013*mx023-mx012
*mx022*mx01*mx02

```



```

mx012*mx024-mx012*mx02*mx023;
mx012*mx022-(mx01)^2*mx022 mx01*mx023-mx02*mx01*mx022
mx013*mx022-
mx012*mx01*mx022 mx012*mx023-(mx01)^2*mx02*mx022
mx01*mx024-mx01*(mx022)^2
mx014*mx022-mx013*mx01*mx022 mx013*mx023-mx012*mx02
*mx01*mx022 mx012*mx024-
(mx01*mx022)^2 mx01*mx025-mx01*mx022*mx023;
0 mx024-mx02*mx023 0 mx01*mx024-mx01*mx02*mx023 mx025
-mx022*mx023 0
mx012*mx024-mx012*mx02*mx023 mx01*mx025-mx01*mx022*mx023
mx026-mx023^2; ];

```

```

Psixe0=[mx012 mx01*mx02 mx013 mx012*mx02 mx01*mx022 mx014
mx013*mx02 mx012*mx022 mx01*mx023;
mx01*mx02 mx022 mx012*mx02 mx01*mx022 mx023 mx013*mx02
mx012*mx022 mx01*mx023 mx024;
mx013 mx012*mx02 mx014 mx013*mx02 mx012*mx022 mx015 mx014*
mx02 mx013*mx022 mx012*mx023;
mx012*mx02 mx01*mx022 mx013*mx02 mx012*mx022 mx01*mx023
mx014*mx02 mx013*mx022 mx012*mx023 mx01*mx024;
mx01*mx022 mx023 mx012*mx022 mx01*mx023 mx024 mx013*mx022
mx012*mx023 mx01*mx024 mx025;
mx014 mx013*mx02 mx015 mx014*mx02 mx013*mx022 mx016 mx015*
mx02 mx014*mx022 mx013*mx023;

```

```

mx013*mx02 mx012*mx022 mx014*mx02 mx013*mx022 mx012*mx023
mx015*mx02 mx014*mx022 mx013*mx023 mx012*mx024;
mx012*mx022 mx01*mx023 mx013*mx022 mx012*mx023 mx01*mx024
mx014*mx022 mx013*mx023 mx012*mx024 mx01*mx025;
mx01*mx023 mx024 mx012*mx023 mx01*mx024 mx025 mx013*mx023
mx012*mx024 mx01*mx025 mx026;];

Xeh=zeros(n_3,T+1);
Xep=Xeh;

Yep=zeros(q_3,T+1);

xep=mxe0;
Ppe=Covxe0;

mxe=mxe0;
Psixe=Psixe0;

% segue l'algoritmo del filtro di Kalman polinomiale esteso

for k=0:T

Xep(:,k+1)=xep;

Gamma=[0 ; mw2; 3*mw2*mxe(1,:)];

```

```

PsiW=[mw2  2*mw2*mxe(1,:)      3*mw2*mxe(3,)+mw4;
      2*mw2*mxe(1,)  mw4-mw2^2+4*mw2*Psixe(1,1)
      5*mw4*mxe(1,)-3*mw2^2*mxe(1,)+6*mw2*Psixe(1,3);
      3*mw2*mxe(3,)+mw4  5*mw4*mxe(1,)-3*mw2^2*mxe(1,)+
      6*mw2*Psixe(1,3)  mw6+6*mw4*mxe(3,)+9*mw2*Psixe(3,3)+
      9*mw4*Psixe(1,1)-9*mw2^2*mxe(1,)^2;];

y=Y(:,k+1);

ye=[y;y^2;y^3];

yep=Ce*xep+Gamma;

Yep(:,k+1)=yep;

Ke=Ppe*Ce'*inv(Ce*Ppe*Ce'+PsiW);

Pe=(eye(n_3)-Ke*Ce)*Ppe;

xeh=xep+Ke*(ye-yep);

Xeh(:,k+1)=xeh;

xelh=xeh(1,:);

```

```
xe2h=xeh(2,:);
```

```
Ae=[0 0 0 1 0 0 0 0 0 ;
     0 1 0 0 0 0 0 0 0 ;
     (2*xelh*xe2h^2) (2*xelh^2*xe2h) (-xe2h^2) (-4*xelh*xe2h)
     (-xelh^2) 0 2*xe2h 2*xelh 0;
     0 0 0 0 0 0 0 1 0;
     0 0 0 0 1 0 0 0 0;
     18*xelh^2*xe2h^3 18*xelh^3*xe2h^2 -9*xelh*xe2h^3
     -27*xelh^2*xe2h^2 -9*xelh^3*xe2h xe2h^3 9*xelh*xe2h^2
     9*xelh^2*xe2h xelh^3;
     6*xelh*xe2h^3 9*xelh^2*xe2h^2 -2*xe2h^3 -12*xelh*xe2h^2
     -6*xelh^2*xe2h 0 3*xe2h^2 6*xelh*xe2h xelh^2;
     xe2h^3 3*xelh*xe2h^2 0 -3*xe2h^2 -3*xelh*xe2h 0 0
     3*xe2h xelh;
     0 0 0 0 0 0 0 0 1];
```

```
Ue=[ 0 ;
     0 ;
     -xelh^2*xe2h^2+mv2;
     0 ;
     0 ;
     -10*xelh^3*xe2h^3+3*mv2*Psixe(1,2);
     -4*xelh^2*xe2h^3+mv2*mxe(2,:);
     -xelh*xe2h^3;
```

```

0;];

% vengono calcolati i termini che compaiono nella covarianza
% del rumore esteso di stato

m_nv= mv4+3*mv2*(2*xelh*mxe(8, :)+2*xe2h*mxe(7, :)-4*xelh*
      xe2h*mxe(4, :)-
      xe2h^2*mxe(3, :)-xelh^2*mxe(5, :)+2*xelh*xe2h^2*mxe(1, :)+
      2*xelh^2*xe2h*mxe(2, :)-xelh^2*xe2h^2);

m_nv2 = 3*mv4*mxe(4, :)-3*mv2^2*mxe(4, :);

m_nv4= mv4*mxe(4, :)+mv2*(6*xelh*Psixe(4,8)+6*xe2h*Psixe(4,7)-
      12*xelh*xe2h*Psixe(4,4)-3*xe2h^2*Psixe(3,4)-3*xelh^2*
      Psixe(4,5)
      +6*xelh*xe2h^2*Psixe(1,4)+6*xelh^2*xe2h*Psixe(2,4)-
      3*xelh^2*xe2h^2*mxe(4, :));

m_nv2=mv4*mxe(2, :)+mv2*(6*xelh*Psixe(2,8)+6*xe2h*Psixe(2,7)-
      12*xelh*xe2h*Psixe(2,4)-3*xe2h^2*Psixe(2,3)-3*xelh^2*
      Psixe(2,5)
      +6*xelh*xe2h^2*Psixe(1,2)+6*xelh^2*xe2h*Psixe(2,2)-
      3*xelh^2*xe2h^2*mxe(2, :));

m_nv8=mv4*mxe(8, :)+mv2*(6*xe2h*Psixe(7,8)+6*xelh*Psixe(8,8)-

```

```

12*xelh*xeh*Psixe(4,8)-3*xeh^2*Psixe(3,8)-3*xelh^2*
Psixe(5,8)
+6*xelh*xeh^2*Psixe(1,8)+6*xelh^2*xeh*Psixe(2,8)-
3*xelh^2*xeh^2*mxe(8,:));

m_nv5=mv4*mxe(5,:)+mv2*(6*xelh*Psixe(5,8)+6*xeh*Psixe(5,7)-
12*xelh*xeh*Psixe(4,5)-3*xeh^2*Psixe(3,5)
-3*xelh^2*Psixe(5,5)+6*xelh*xeh^2*Psixe(1,5)+
6*xelh^2*xeh*Psixe(2,5)-3*xelh^2*xeh^2*mxe(5,:));

m_nv2x2=3*mv4*Psixe(2,4)-3*mv2^2*mxe(2,:)*mxe(4,:);

m_n2=mv6+3*mv4*(4*xelh*mxe(8,:)+4*xeh*mxe(7,:)-
8*xelh*xeh*mxe(4,:)+
3*Psixe(4,4)-2*xeh^2*mxe(3,:)-2*xelh^2*mxe(5,:))
+4*xelh*xeh^2
*mxe(1,:)+4*xelh^2*xeh*mxe(2,:)-2*xelh^2*xeh^2)
+9*mv2*(8*xelh*xeh*Psixe(7,8)-4*xeh^3*Psixe(3,7)
-4*xelh^3*Psixe(5,8)-4*xelh*xeh^4*Psixe(1,3)+
8*xelh*xeh^3*Psixe(3,4)+8*xelh*xeh^3*
Psixe(1,7)-4*xelh^4*xeh*Psixe(2,5)+
8*xelh^3*xeh*Psixe(4,5)+
8*xelh^3*xeh*Psixe(2,8)-4*xelh*xeh^2*Psixe(3,8)-
16*xelh*xeh^2*Psixe(4,7)-16*xelh^2*xeh*Psixe(4,8)-
4*xelh^2*xeh*Psixe(5,7)-2*mv2*mxe(4,:)^2+

```

```

xe2h^4*Psixe(3,3)+xelh^4*xe2h^4+xelh^4*Psixe(5,5)+
4*xelh^2*Psixe(8,8)+4*xe2h^2*Psixe(7,7)-
4*xelh^3*xe2h^4*mxe(1,:)-4*xelh^4*xe2h^3*mxe(2,:)+
2*xelh^2*xe2h^4*mxe(3,:)+8*xelh^3*xe2h^3*
mxe(4,:)+2*xelh^4*xe2h^2*mxe(5,:)-4*xelh^2*xe2h^3*mxe(7,:)-
4*xelh^3*xe2h^2*mxe(8,:)+8*xelh^3*xe2h^3*
Psixe(1,2)-16*xelh^2*xe2h^3*
Psixe(1,4)-4*xelh^2*xe2h^3*Psixe(2,3)-
4*xelh^3*xe2h^2*Psixe(1,5)-
16*xelh^3*xe2h^2*Psixe(2,4)+2*xelh^2*
xe2h^2*Psixe(3,5)+8*xelh^2*xe2h^2*
Psixe(1,8)+8*xelh^2*xe2h^2*Psixe(2,7)+
4*xelh^2*xe2h^4*Psixe(1,1)+
4*xelh^4*xe2h^2*Psixe(2,2)+16*xelh^2*xe2h^2
*Psixe(4,4))+9*mv2^2*mxe(4,:)^2;

```

```

PsiV = [mv2          0      2*mv2*mxe(4,:)   mxe(2,:)*mv2   0
        m_nv 2*mv2*mxe(8,:) mv2*mxe(5,:) 0;
        0          0          0          0          0
        0          0          0          0;
        2*mv2*mxe(4,:) 0   mv4-mv2^2+4*mv2*Psixe(4,4)
        2*mv2*Psixe(2,4)
        0  2*m_nv*x4+m_nv2 mv4*mxe(2,:)+4*mv2*Psixe(4,8)-
        mv2^2*mxe(2,:)
        2*mv2*Psixe(4,5) 0;

```

```

mxe(2,:)*mv2      0      2*mv2*Psixe(2,4) Psixe(2,2)*mv2      0
m_nv2 2*mv2*Psixe(2,8) mv2*Psixe(2,5)      0;
0      0      0      0      0
0      0      0      0;
m_nv      0      2*m_nv4+m_nv2 m_nv2 0 m_n2 2*m_nv8+
m_nv2x2 m_nv5 0;
2*mv2*mxe(8,:) 0 mv4*mxe(2,)+4*mv2*
Psixe(4,8)-mv2^2*mxe(2,:)
2*mv2*Psixe(2,8) 0 2*m_nv8+m_nv2x2 mv4*Psixe(2,2)+
4*mv2*Psixe(8,8)-mv2^2*mxe(2,)^2 2*mv2*Psixe(5,8) 0;
mv2*mxe(5,:) 0 2*mv2*Psixe(4,5) mv2*Psixe(2,5) 0 m_nv5
2*mv2*Psixe(5,8) mv2*Psixe(5,5) 0;
0      0      0      0      0
0      0      0      0;];

xep=Ae*xeh+Ue;

Ppe=Ae*Pe*Ae'+PsiV;

Psixe=Ae*Psixe*Ae'+Ue*Ue'+PsiV+Ae*mxe*Ue'+Ue*mxe'*Ae';

mxe=Ae*mxe+Ue;

end

```



```
% calcolo degli errori

Alfa=alfa*ones(1,T+1);

Alfah=Xeh(2,:);

ErrX1u=X-Y;

ErrX1=X-Xeh(1,:);

ErrX2=Alfa-Alfah;

CovErrX1u=Cov(ErrX1u);

% calcolo delle covarianze campionarie

CovErrX1=Cov(ErrX1);

CovErrX2=Cov(ErrX2);

% fase di stampa

T_ridotto=T/10;

Tempi=0:T;
```

```
Tempi_ridotto=0:T_ridotto;

figure(1);
    plot(Tempi_ridotto,X(1,1:T_ridotto+1),Tempi_ridotto,
         Y(1,1:T_ridotto+1),Tempi_ridotto,Xeh(1,1:T_ridotto+1));
    legend('x','y','Stima di x');
    title('Stato');

figure(2);
    plot (Tempi,Alfa(1,:),Tempi,Alfah(1,:));
    legend('alfa','Stima di alfa');
    title('Parametro');
```

Filtraggio del sistema

```
% Filtraggio.m
% Questo file esegue il filtraggio del sistema in esame
% applicando i vari filtri
% studiati e mostra disegni comparativi

% Applicazione dell'EKF con stima del parametro secondo
% il metodo uniforme;
```

```
EKF_uniforme;
CovErrX1_EKF_uniforme=CovErrX1
CovErrX2_EKF_uniforme=CovErrX2
Xh_EKF_uniforme=Xh(1,:);
Alfah_EKF_uniforme=Alfah;

save sys1;

pause

% Applicazione dell'EKF con stima del parametro secondo
% il metodo gaussiano;

EKF_gaussiano;
CovErrX1_EKF_gaussiano=CovErrX1
CovErrX2_EKF_gaussiano=CovErrX2
Xh_EKF_gaussiano=Xh(1,:);
Alfah_EKF_gaussiano=Alfah;

save sys2;

pause

% Applicazione del PEKF di ordine 2 con stima del parametro
```

```
% secondo il metodo uniforme;

PEKF_uniforme;
CovErrX1_PEKF_uniforme=CovErrX1
CovErrX2_PEKF_uniforme=CovErrX2
Xh_PEKF_uniforme=Xeh(1,:);
Alfah_PEKF_uniforme=Alfah;

save sys3;

pause

% Applicazione del PEKF di ordine 2 con stima del parametro
% secondo il metodo gaussiano;

PEKF_gaussiano;
CovErrX1_PEKF_gaussiano=CovErrX1
CovErrX2_PEKF_gaussiano=CovErrX2
Xh_PEKF_gaussiano=Xeh(1,:);
Alfah_PEKF_gaussiano=Alfah;

save sys4;

pause
```

```
% Applicazione del PEKF di ordine 3;

PEKF_cubico;
CovErrX1_PEKF_cubico=CovErrX1
CovErrX2_PEKF_cubico=CovErrX2
Xh_PEKF_cubico=Xeh(1,:);
Alfah_PEKF_cubico=Alfah;

save sys5;

pause;

load sys1;
load sys2;
load sys3;
load sys4;

% fase di stampa

figure(1);

    plot (Tempi_ridotto,Y(1,1:T_ridotto+1),Tempi_ridotto,
          X(1,1:T_ridotto+1),Tempi_ridotto,
          Xh_EKF_uniforme(1,1:T_ridotto+1),
          Tempi_ridotto,Xh_EKF_gaussiano(1,1:T_ridotto+1),
          Tempi_ridotto,
          Xh_PEKF_uniforme(1,1:T_ridotto+1),Tempi_ridotto,
```

```
    Xh_PEKF_gaussiano(1,1:T_ridotto+1),Tempi_ridotto,
    Xh_PEKF_cubico(1,1:T_ridotto+1));
legend('y','x','Stima di x (EKF uniforme)',
       'Stima di x (EKF gaussiano)',
       'Stima di x (PEKF uniforme di ordine 2)',
       'Stima di x (PEKF gaussiano di ordine 2)',
       'Stima di x (PEKF di ordine 3)');
title('Stato');

figure(2);
plot (Tempi,Alfa(1,:),Tempi,Alfah_EKF_uniforme(1,:),
      Tempi,Alfah_EKF_gaussiano(1,:),Tempi,
      Alfah_PEKF_uniforme(1,:),Tempi,
      Alfah_PEKF_gaussiano(1,:),Tempi,
      Alfah_PEKF_cubico(1,:));
legend('alfa','Stima di alfa (EKF uniforme)',
       'Stima di alfa (EKF gaussiano)',
       'Stima di alfa (PEKF uniforme di ordine 2)',
       'Stima di alfa (PEKF gaussiano di ordine 2)',
       'Stima di alfa (PEKF di ordine 3)');
title('Parametro');
```

Bibliografia

[1] M. Dalla Mora, A. Germani, C. Manes, *Introduzione alla teoria dell'identificazione dei sistemi*, EUROMA, 1997.

[2] F. Carravetta, A. Germani, M. Raimondi, *Polynomial filtering of discrete-time stochastic systems with multiplicative state noise*, IEEE Trans. Autom. Contr., Vol.42(1997), pp. 1106-1126.

[3] A. Germani, C. Manes, P. Palumbo, *Polynomial Extended Kalman Filtering for discrete-time Nonlinear Stochastic Systems*, 42nd IEEE Conf. on Decision and Control, Maui, Hawaii, 2003.

[4] A. Del Bianco, *Tecniche di filtraggio polinomiale per sistemi non lineari basate sull'approssimazione di Carleman*, Tesi di laurea in Ingegneria Elettronica, Università degli Studi dell'Aquila, A.A. 2002/2003.

[5] A. Graham, *Kronecker Products and Matrix Calculus with Applications*, Halsted Press, John Wiley and Sons, 1981.

[6] D.J. Higham, *An algorithmic Introduction to Numerical Simulation of Stochastic Differential Equations*, SIAM Review, Vol.43, No.3 (2001), pp. 525-546.

- [7] M.L. Andreade Netto, L. Gimeno, M.J. Mendes, *On the optimal and suboptimal nonlinear filtering problem for discrete-time systems*, IEEE Trans. Autom. Contr., Vol.23 (1978), pp. 1062-1067.
- [8] R. Bucy, *Linear and nonlinear filtering*, Proc. of IEEE, Vol.58, No.6 (1970).
- [9] F. Carravetta, A. Germani, M. Raimondi, *Polynomial filtering for linear discrete-time non-Gaussian systems*, SIAM J. Control and Optim., Vol.34, No.5 (1996), pp. 1666-1690.
- [10] K.Kowalski, W. H. Steeb, *Nonlinear Dynamical Systems and Carleman Linearization*, World Scientific, Singapore, 1991.
- [11] D. L. Alspace, H.W. Sorenson, *Nonlinear Bayesian estimation using Gaussian sum approximation*, IEEE Trans. Autom. Contr., Vol.17 (1972), pp. 439-448.
- [12] B. D. O. Anderson, J. B. Moore, *Optimal Filtering*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice - Hall, 1979.
- [13] M. Bontayeb, H. Rafarlaky, M. Darouach, *Covergence analysis of the extended Kalman Filter used as an observer for nonlinear discrete-time systems*, IEEE Trans. Autom. Contr., Vol.42 (1997), pp. 581-586.
- [14] C. Bruni, G. Di Pillo, G. Koch, *Bilinear systems: an appealing class of nearly linear systems in theory and applications*, IEEE Trans. Autom. Contr., Vol.19, No. 4 (1974), pp. 334-348.

- [15] C.K. Chui, G.Chen, *Kalman Filtering with Real-Time Applications*, New York: Springer-Verlag, 1987.
- [16] K. Ito, K. Xiong, *Gaussian filters for nonlinear filtering problems*, IEEE Trans. Autom. Contr., Vol.45 (2000), pp. 910-927.
- [17] A. H. Jazwinski, *Stochastic Processes and Filtering Theory*, New York: Academic, 1970.
- [18] A. V. Balakrishnan, *Kalman Filtering Theory*, New York: Optimization Software, 1984.
- [19] Y. Kleyman, I. Mochalov, *Identification of nonstationary systems*, Autom. Rem. Contr., Vol.55 (1994), pp. 149-163.
- [20] R. E. Kalman, *A new approach to linear filtering and prediction problems*, ASME J. Basic Eng., series D, Vol.82, 1960.

Ringraziamenti

Dopo essere giunto ad un traguardo così importante, ho il dovere e il piacere di guardarmi intorno e di ripensare a ciò che è stato, ripercorrere tanti momenti, ringraziare le persone a cui voglio bene.

Ora sono tutti al mio fianco, come hanno sempre fatto, mi hanno sostenuto, appoggiato nei momenti tristi e difficili, ed hanno condiviso con me attimi lieti, come questo.

Sono persone che vorrei ripagare, ma non è in mio potere farlo, così spero che basti loro un semplice GRAZIE.

I primi a cui va il mio pensiero sono i miei familiari, coloro che mi hanno sempre dato forza e guidato sin dall'inizio del mio percorso. Spero che siano orgogliosi di me, così come spero di averli, almeno in parte, ripagati per gli sforzi e i sacrifici compiuti per me.

Ringrazio Patrizia, una persona straordinaria, che non ha mai smesso di aiutarmi e di sacrificarsi per me. Presto arriverà anche per lei questo giorno, spero di poterle essere vicino come lei ha fatto con me.

Ringrazio i miei amici, tutti, che non cito per nome per non rischiare di dimenticare, e quindi di deludere, qualcuno. Perché sono proprio i momenti di svago passati con loro che mi danno la forza, quotidianamente, per andare avanti con impegno nella vita e che mi ricordano che la vita vale davvero la pena di essere

vissuta, se hai al tuo fianco simili compagni di avventure.

Infine, un ringraziamento particolare ai professori Germani, Manes, Palumbo e Pepe del Laboratorio di Automatica e Robotica, che spesso hanno dovuto sopportare, in questi mesi, con infinita pazienza, le mie domande e dare ad esse una risposta, cosa che mi ha permesso più di una volta di *aggiustare il tiro*.

A tutte queste persone è dedicato questo lavoro.