Corso di Controlli Automatici
Prof. Stefano Di Gennaro

Metodi diretti di sintesi - Richiami di teoria

Ing. Alessandro Borri
borri@ing.univaq.it

1 Generalità

I metodi diretti di sintesi consistono nella sintesi di un controllore tramite algoritmi diretti. Essi si differenziano da quelli per tentativi perchè questi raggiungono l'obiettivo tramite una serie di successive rettifiche di una scelta iniziale.

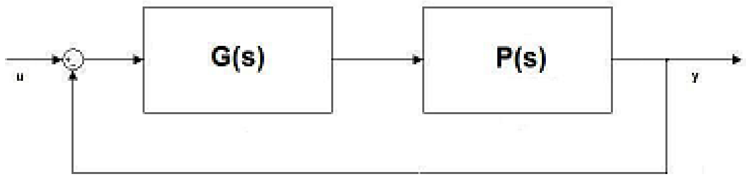
Tra le caratteristiche del sistema di controllo, in una sintesi diretta si prende essenzialmente in considerazione la *fedeltà della risposta*. Eventualmente, si può anche cercare di controllare la *risposta ai disturbi* del sistema reazionato.

2 Sintesi della funzione di trasferimento ingresso-uscita

La fedeltà della risposta è completamente caratterizzata dalla funzione di trasferimento ingresso-uscita

$$W(s) = \frac{G(s)P(s)}{1 + G(s)P(s)} = \frac{F(s)}{1 + F(s)}$$

prendendo in considerazione lo schema



Nella sintesi diretta, si cerca di imporre integralmente una ben determinata $W(s)$, in 2 fasi:

1. Scelta di W(s)
2. Calcolo della G(s)

Nei metodi diretti di sintesi, gli eventuali tentativi sono confinati nella prima fase, mentre la seconda fase è puramente algoritmica e consiste nell'invertire la relazione

$$W_{des}(s) = \frac{G(s)P(s)}{1 + G(s)P(s)} = \frac{F(s)}{1 + F(s)}$$

dove $W_{des}(s)$ è l'output della fase 1, cioè è la funzione di trasferimento desiderata a ciclo chiuso.

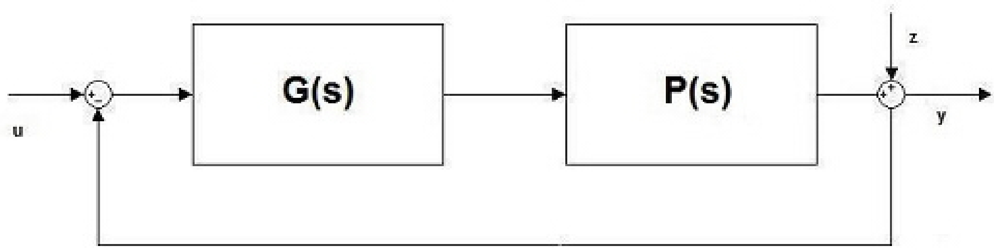
In riferimento allo schema a controreazione unitaria rappresentato in precedenza, si ha

$$\begin{aligned} \frac{F(s)}{1 + F(s)} &= W_{des}(s) \\ F(s) &= W_{des}(s) + F(s)W_{des}(s) \\ F(s) &= \frac{W_{des}(s)}{1 - W_{des}(s)} \\ G(s) &= \frac{1}{P(s)} \frac{W_{des}(s)}{1 - W_{des}(s)} \end{aligned}$$

Si noti che il procedimento non fa altro che cancellare completamente il processo $P(s)$ per porre, sul ramo diretto, la funzione $F(s)$ che dà luogo alla $W_{des}(s)$ a catena chiusa. Pertanto è necessario che non ci siano poli e zeri a parte reale non negativa in $P(s)$, altrimenti la cancellazione di tali termini darebbe luogo ad un sistema che non è stabile asintoticamente.

3 Sintesi a più obiettivi

Se si vuole considerare, oltre al problema della fedeltà della risposta, anche quello della risposta ai disturbi, si può considerare lo schema seguente



con disturbo additivo agente sull'uscita.

Il legame disturbo-uscita è completamente caratterizzato dalla funzione di trasferimento disturbo-uscita

$$W_z(s) = \frac{1}{1 + G(s)P(s)} = \frac{1}{1 + F(s)}$$

Il procedimento di sintesi diretta consiste, quindi, in 2 fasi analoghe a quelle descritte nel caso della $W(s)$, e cioè:

1. Scelta di W_z(s)
2. Calcolo della G(s)

dove la seconda fase è puramente algoritmica e consiste nell'invertire la relazione

$$W_{z,des}(s) = \frac{1}{1 + G(s)P(s)} = \frac{1}{1 + F(s)}$$

dove $W_{z,des}(s)$ è l'output della fase 1, cioè è la funzione di trasferimento disturbo-uscita desiderata a ciclo chiuso.

In riferimento allo schema rappresentato in precedenza, si ha

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+F(s)} &= W_{z,des}(s) \\
1 &= W_{z,des}(s) + F(s)W_{z,des}(s) \\
F(s) &= \frac{1-W_{z,des}(s)}{W_{z,des}(s)} \\
G(s) &= \frac{1}{P(s)}\frac{1-W_{z,des}(s)}{W_{z,des}(s)}
\end{aligned}$$

Si capisce che non si può imporre contemporaneamente

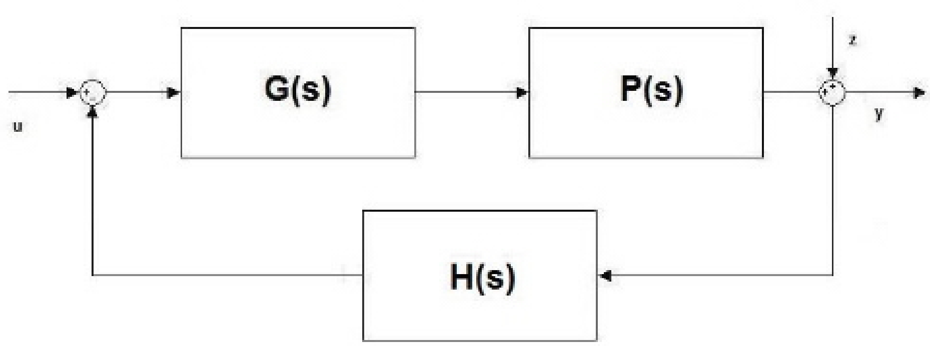
$$G(s) = \frac{1}{P(s)}\frac{W_{des}(s)}{1-W_{des}(s)}$$

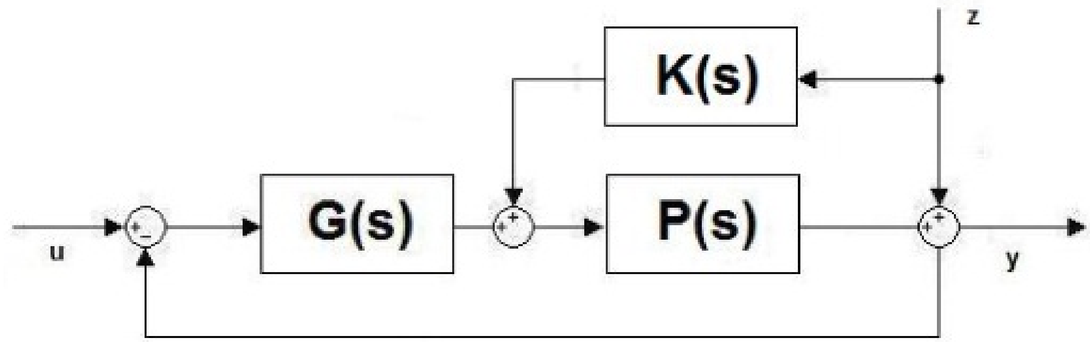
e

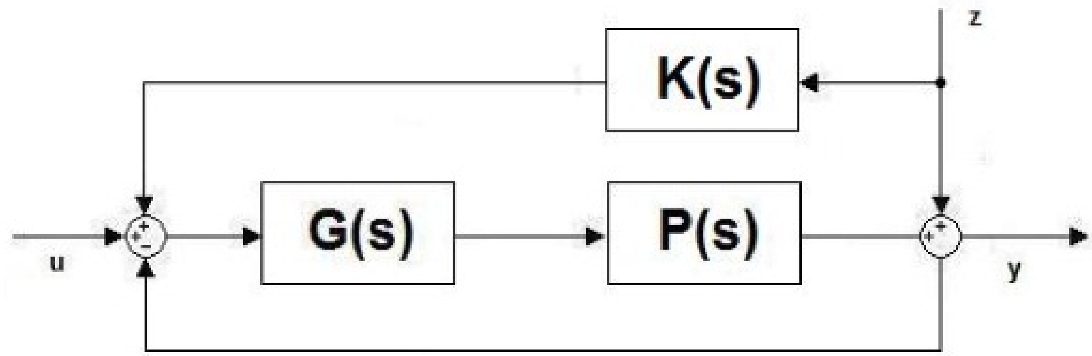
$$G(s) = \frac{1}{P(s)}\frac{1-W_{z,des}(s)}{W_{z,des}(s)}$$

ma per risolvere contemporaneamente 2 specifiche, saranno necessari 2 gradi di libertà, cioè 2 controllori da scegliere in modo indipendente.

Possibili schemi che risolvono il problema sono i seguenti







Nelle ultime 2 figure si parla di compensazione diretta del disturbo, che è possibile se il disturbo è misurabile.

A seconda dello schema adottato, basta imporre $W_{des}(s)$ e $W_{z,des}(s)$ e con semplici manipolazioni algebriche si può arrivare a trovare le relazioni esplicite che legano i 2 controllori alle 2 funzioni desiderate.

4 Stabilità e realizzabilità

Per la stabilità del sistema a ciclo chiuso, in base anche a quanto detto in precedenza, si ha la necessità che non ci siano poli e zeri a parte reale non negativa in $P(s)$, altrimenti la cancellazione di tali termini darebbe luogo ad un sistema che non è stabile asintoticamente.

Un'eccezione è data nel caso in cui si voglia imporre, in un sistema a retroazione unitaria, la funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{1}{1 + 2\zeta\frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$$

che dà luogo ad una funzione di trasferimento sul ramo diretto pari a

$$F(s) = \frac{1}{\frac{s}{\omega_n}\left(\frac{s}{\omega_n} + 2\zeta\right)}$$

Ciò significa che eventuali poli in $s = 0$ nel processo di partenza non vengono cancellati dal controllore $G(s)$, e quindi è possibile utilizzare la sintesi diretta.

Per quanto riguarda la realizzabilità del processo, si considera un processo caratterizzato da una funzione di trasferimento $P(s)$ strettamente propria (differenza poli-zeri positiva), in quanto ogni processo fisico ha caratteristiche passa-basso. Anche $F(s)$ e $W(s)$, per lo stesso motivo, devono essere strettamente proprie.

Indicando con d_G, d_P, d_F, d_W le differenze poli-zeri di $G(s)$, $P(s)$, $F(s)$, $W(s)$, rispettivamente, poichè si ha, in retroazione unitaria

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{N_F(s)}{D_F(s)} = G(s)P(s) = \frac{N_G(s)N_P(s)}{D_G(s)D_P(s)} \\ W(s) &= \frac{F(s)}{1+F(s)} = \frac{N_F(s)}{N_F(s)+D_F(s)} \end{aligned}$$

allora si hanno le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} d_F &= d_G + d_P \\ d_W &= d_F = d_G + d_P \end{aligned}$$

e quindi

$$d_G = d_W - d_P \geq 0$$

perchè il controllore deve essere realizzabile (proprio).

Pertanto, affinchè sia possibile realizzare un controllore $G(s)$ che dia luogo ad una funzione di trasferimento $W(s)$ a catena chiusa, è necessario che si abbia

$$d_P \leq d_W$$

In uno schema, sempre ad un grado di libertà, con retroazione unitaria e disturbo sull'uscita, in cui invece si voglia imporre una certa $W_z(s)$, si ha

$$W_z(s) = \frac{1}{1 + F(s)}$$

Si può notare che sussiste la relazione

$$1 - W_z(s) = 1 - \frac{1}{1 + F(s)} = \frac{1 + F(s) - 1}{1 + F(s)} = \frac{F(s)}{1 + F(s)}$$

cioè $1 - W_z(s)$ ha la stessa espressione che aveva $W(s)$ nello schema precedente.

Si possono quindi sfruttare le relazioni sulle differenze poli-zeri già esaminate, sostituendo $1 - W_z(s)$ a $W(s)$, concludendo immediatamente che, affinchè sia possibile realizzare un controllore $G(s)$ che dia luogo ad una funzione di trasferimento disturbo-uscita $W_z(s)$ a catena chiusa, è necessario che si abbia

$$d_P \leq d_{1-W_z}$$

Per quanto riguarda gli schemi a compensazione diretta del disturbo, nel caso si imponga la cosiddetta *compensazione totale del disturbo*

$$W_z(s) = 0$$

si dà luogo sempre ad un controllore irrealizzabile (almeno negli schemi sopra riportati), in quanto si ha rispettivamente, nei 2 schemi (numerarli!!)

$$\begin{aligned} K(s) &= -\frac{1}{F(s)} = -\frac{1}{G(s)P(s)} \\ K(s) &= -\frac{1}{P(s)} \end{aligned}$$

e quindi se $P(s)$ e $F(s)$ sono strettamente proprie, $K(s)$ risulta sempre essere impropria.

E' necessario, per la realizzabilità di $G(s)$ nel caso ad un grado di libertà e di $K(s)$ negli schemi successivi, che sia

$$\lim_{s \to +\infty} W_z(s) = 1$$

che rende impraticabile la compensazione totale del disturbo per tutte le frequenze

$$W_z(s) = 0$$

Si può invece avere una compensazione del disturbo di un fattore grande a piacere fino ad una certa frequenza ω^*, ma poi è necessario che il diagramma di Bode delle ampiezze di $W_z(j\omega)$ "risalga" fino a tendere a 0 dB per $\omega \to +\infty$.

In generale, per affrontare il problema della realizzabilità, nel caso in cui si sia determinata una $W(s)$ che soddisfi le specifiche ma che non dia luogo ad un controllore realizzabile, si può asserire che la funzione di trasferimento

$$\hat{W}(s) = W(s) \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{\omega_0}\right)^r}$$

può soddisfare le specifiche purchè il valore ω_0 sia sufficientemente elevato. Infatti i valori delle risposte armoniche di $W(s)$ e $\hat{W}(s)$ differiranno solo per valori molto alti della frequenza, e quindi specifiche come banda passante e modulo alla risonanza rimangono verificate in $\hat{W}(s)$ se sono verificate in $W(s)$.

Sulla base di ciò, si può procedere nel modo seguente: si sceglie $W(s)$ che soddisfi le specifiche di progetto ed eventualmente si aggiunge un numero di *poli reali sufficientemente lontani* tale da avere una $\hat{W}(s)$ con differenza poli-zeri pari a quella di $P(s)$. Dopodichè si ricava, con un semplice calcolo, il controllore $G(s)$ che è realizzabile per costruzione.

Si noti che l'aggiunta di poli lontani può rendere il valore massimo del modulo di $G(j\omega)$ eccessivo rispetto a eventuali limiti fisici dei dispositivi di controllo che devono produrre tale risposta. Non vengono analizzate, in questa sede, specifiche sul valore massimo di $G(j\omega)$, che non sono peraltro facilmente quantificabili. Tuttavia è consigliabile, ai fini di raggiungere un compromesso tra le esigenze di avere poli sufficientemente lontani e valore massimo di $G(j\omega)$ non troppo grande, assumere un valore di ω_0 pari all'incirca a 3-4 volte la banda passante richiesta.

5 Scelta della funzione di trasferimento ingresso-uscita (cenni)

Non è oggetto di queste note caratterizzare il problema della scelta della struttura e dei parametri della funzione di trasferimento che si vuole imporre al sistema. In genere si considerano le stesse specifiche progettuali viste nel caso della sintesi per tentativi.

Per quanto riguarda le specifiche a regime permanente, il sistema può essere caratterizzato dal tipo e dall'entità massima dell'errore corrispondente. Tali specifiche possono essere mappate in modo abbastanza semplice in condizioni su $W(s)$. Riguardo alle specifiche sul comportamento transitorio (ad esempio banda passante e sovraelongazione) non è immediato, invece, passare a delle condizioni sui parametri di $W(s)$. Si utilizzano, in tali casi, approssimazioni e i cosiddetti diagrammi universali.

In genere si ricorre, per la funzione di trasferimento a ciclo chiuso $W(s)$, alla struttura elementare

$$W_I(s) = \frac{1}{1 + 2\zeta\frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$$

e qualora questa non fosse sufficiente per soddisfare simultaneamente diverse specifiche, si ricorre al'aggiunta di un polo e uno zero in posizioni opportune

$$W_{II}(s) = \frac{1}{1 + 2\zeta\frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}} \frac{m\,(s+z)}{(s+mz)}$$

con $m > 1$.

Riferimenti bibliografici

[1] A. Isidori, Sistemi di controllo, Ed. Siderea, 1992.