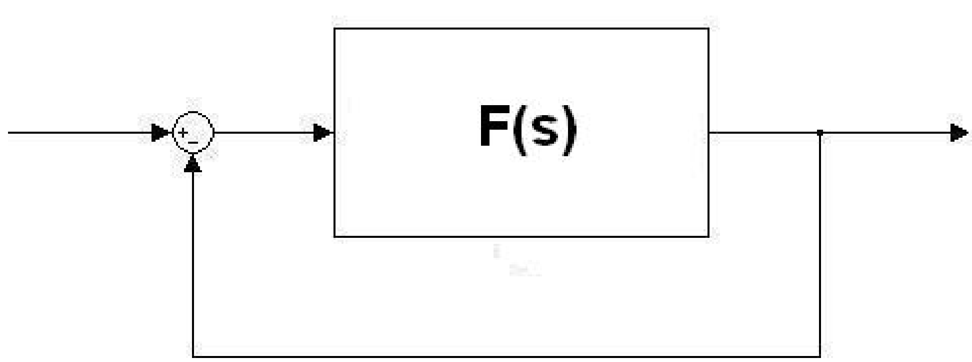
Corso di Controlli Automatici
Prof. Stefano Di Gennaro

Sintesi mediante luogo delle radici - Richiami di teoria

Ing. Alessandro Borri
borri@ing.univaq.it

1 Generalità

Sia dato un sistema dinamico a controreazione unitaria, descritto dalla funzione di trasferimento $F(s)$ sul ramo diretto



$$F(s) = K' \frac{\prod_{i=1}^{m} (s - z_i)}{\prod_{i=1}^{n} (s - p_i)}$$

La funzione di trasferimento a ciclo chiuso è descritta dalla funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{F(s)}{1+F(s)} = \frac{\mathrm{Num}_{F(s)}}{\mathrm{Num}_{F(s)} + \mathrm{Den}_{F(s)}} = \frac{K' \prod_{1=1}^{m} (s-z_i)}{K' \prod_{i=1}^{m} (s-z_i) + \prod_{i=1}^{n} (s-p_i)}$$

Definizione *Il luogo delle radici è il luogo descritto, nel piano complesso, dalle radici dell'equazione*

$$K' \prod_{i=1}^{m} (s-z_i) + \prod_{i=1}^{n} (s-p_i) = 0$$

al variare di $K' \in \mathbb{R}$.

Finalità Il luogo delle radici può essere studiato per risolvere il problema della stabilizzazione del sistema a ciclo chiuso. Più in generale permette di assicurare che i poli della funzione di trasferimento a ciclo chiuso (radici dell'equazione appena scritta per un fissato K') appartengano ad una regione desiderata.

Nel caso della stabilizzazione, se per uno o più valori del guadagno (generalmente un intervallo), i poli a ciclo chiuso sono tutti nel semipiano sinistro del piano complesso, allora si può stabilizzare il sistema a ciclo chiuso con la scelta di un opportuno K' sul ramo diretto. Altrimenti è necessario ricorrere ad una compensazione più complessa, di tipo dinamico (discussa in seguito).

L'equazione scritta in precedenza (*equazione del luogo*) coinvolge grandezze complesse; può dunque essere riscritta come una coppia di uguaglianze tra grandezze reali

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \measuredangle(s-p_i) &= \pi + \measuredangle(K') + \sum_{i=1}^{m} \measuredangle(s-z_i) + 2h\pi \\ \prod_{1=1}^{n} |s-p_i| &= |K'| \prod_{1=1}^{m} |s-z_i| \end{aligned}$$

con h numero intero qualsiasi.

Queste equazioni prendono il nome, nell'ordine, di *condizione di fase* e *condizione di modulo*; esse possono essere utilizzate rispettivamente per il tracciamento e per la graduazione del luogo.

E' opportuno, tuttavia, tracciare il luogo delle radici ricorrendo a semplici regole generali, invece di servirsi di tali condizioni. Nel seguito, si parlerà di *luogo positivo* per indicare la parte del luogo corrispondente a valori $K' > 0$, di *luogo negativo* per indicare la parte del luogo con $K' < 0$.

2 Tracciamento del luogo (analisi)

1. Il luogo delle radici è costituito da n curve dette rami.

2. I poli del sistema a ciclo aperto sono i punti del luogo corrispondenti al valore $K' = 0$.

3. I punti dell'asse reale sono sempre punti del luogo (soddisfano la condizione di fase). Appartengono al luogo positivo i punti dell'asse reale che lasciano alla loro destra un numero dispari di poli e/o zeri di $F(s)$, contati con la loro molteplicità. I restanti punti dell'asse reale appartengono al luogo negativo.

4. Per K' che tende a $\pm\infty$, m rami del luogo convergono sugli zeri di $F(s)$ ed i restanti $n - m$ rami del luogo verso il punto improprio (∞).

5. I rami che convergono al punto improprio tendono ad $n - m$ semirette (*asintoti del luogo*) che formano con l'asse reale angoli pari a

$$\begin{aligned} \varphi_+ &= \frac{(2h+1)\,\pi}{n-m} \quad \text{per il luogo positivo} \\ \varphi_- &= \frac{2h\pi}{n-m} \quad \text{per il luogo negativo} \end{aligned}$$

   con $h = 1, 2, ..., n - m$.

6. Gli asintoti si intersecano in un solo punto s_o, appartenente all'asse reale, chiamato *centro degli asintoti*, di ascissa pari a :

$$s_o = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i}{n-m}$$

7. I punti singolari del luogo (soluzioni multiple dell'equazione del luogo) sono soluzioni del seguente sistema di equazioni corrispondenti ad un valore reale del parametro K'

$$\begin{cases} K' \prod_{i=1}^{m} (s - z_i) + \prod_{i=1}^{n} (s - p_i) = 0 \\ K' \frac{d}{ds} \prod_{i=1}^{m} (s - z_i) + \frac{d}{ds} \prod_{i=1}^{n} (s - p_i) = 0 \end{cases}$$

   Essi sono al più $n + m - 1$.

8. In un punto singolare del luogo, soluzione dell'equazione del luogo con molteplicità μ (per un certo K'), confluiscono 2μ rami del luogo, alternativamente convergenti e divergenti. Le tangenti a questi rami nel punto singolare dividono l'angolo giro in 2μ parti uguali.

9. Gli eventuali punti di attraversamento dell'asse immaginario si determinano applicando il criterio di Routh all'equazione del luogo.

3 Stabilizzazione (sintesi)

1. Si analizza prima il caso di sistemi a **fase minima**, cioè con tutti gli zeri nel semipiano sinistro del piano complesso. Questa situazione è favorevole in quanto si ha la sicurezza che m rami del luogo positivo, per K' sufficientemente elevato, tenderanno a spostarsi nel semipiano sinistro del piano complesso. Risulta quindi decisiva, ai fini della stabilità, la posizione e l'orientamento degli $n - m$ asintoti del luogo.

- Caso $n - m = 1$. Il luogo positivo ha un asintoto costituito dall'asse reale, con valore di fase pari a π. Di conseguenza, per un valore sufficientemente alto di K', si avranno tutti i poli a sinistra dell'asse immaginario, e quindi il sistema sarà stabile asintoticamente a ciclo chiuso.

- Caso $n - m = 2$. Il luogo positivo ha due asintoti, nella direzione dell'asse immaginario, con valori di fase pari a $\pi/2$ e $3\pi/2$. Di conseguenza la stabilità dipende dalla posizione del centro degli asintoti. Se esso è a parte reale negativa, allora si ha stabilità asintotica del sistema del sistema per un K' sufficientemente elevato. Altrimenti si inserisce una coppia polo-zero (controllore proprio di ordine 1) che sposti il centro degli asintoti a sinistra dell'origine, e poi si sceglie un K' sufficientemente elevato per stabilizzare il sistema retroazionato.

- Caso $n-m \geq 3$. Il luogo positivo ha sempre almeno un asintoto che va nel verso delle ascisse positive. Quindi non si può stabilizzare il sistema solo con un guadagno elevato. Si procede a riportarsi al caso $n-m=2$ aggiungendo un controllore con $n-m-2$ zeri a parte reale negativa. Poi, nel caso in cui il centro degli asintoti sia a parte reale negativa, allora si ha stabilità asintotica del sistema del sistema per un K' sufficientemente elevato. Altrimenti si inserisce un'ulteriore coppia polo-zero che sposti il centro degli asintoti a sinistra dell'origine, e poi si sceglie un K' sufficientemente elevato per stabilizzare il sistema retroazionato.

Una volta stabilizzato il sistema, si valuta se il controllore progettato è proprio. Se è così, il problema è risolto, altrimenti si aggiungono $n-m-2$ poli lontani per ottenere la causalità del sistema. Si dimostra che se i poli aggiunti sono sufficientemente lontani, non cambia il valore di K' scelto precedentemente ai fini della stabilità del sistema. Per la scelta dei poli lontani, si può ricorrere al criterio di Routh, avendo fissato il guadagno K'.

2. Se il sistema è a **fase non minima**, per K' sufficientemente elevato si ha instabilità del sistema retroazionato. Non esistono metodi standard per la risoluzione generale del problema di stabilizzazione. Talvolta è necessario studiare il luogo negativo o aggiungere poli e zeri in modo opportuno, con il fine di creare punti singolari che "attraggano" il luogo a sinistra dell'asse immaginario. Si analizzano di seguito alcune situazioni tipiche:

- Se $F(s)$ ha solo poli a parte reale negativa (sistema a ciclo aperto stabile asintoticamente), è necessario e sufficiente, ai fini della stabilità asintotica a ciclo chiuso, scegliere valori di K' non troppo grandi.

- Se $F(s)$ ha solo uno zero ed un polo con parte reale positiva, con il polo posto a destra dello zero, si può porre un altro polo positivo a destra di quello già esistente. In questo modo, "si creerà" un punto singolare tra questi due poli, ed il luogo può assumere una configurazione tale da stabilizzare il sistema a ciclo chiuso per K' interno ad un opportuno intervallo (relativo ad una porzione di luogo positivo).

- Se $F(s)$ ha solo uno zero ed un polo con parte reale positiva, con il polo posto a sinistra dello zero, si ha sicuramente un punto singolare a destra dello zero positivo. Se non è presente un altro punto singolare nel tratto di luogo negativo tra l'origine ed il polo positivo, allora il luogo può assumere una configurazione tale da stabilizzare il sistema a ciclo chiuso per K' interno ad un opportuno intervallo (in questo caso relativo ad una porzione di luogo negativo).

In altri casi, il procedimento non risulta essere sempre immediato. Ad ogni modo, è possibile anche non utilizzare il luogo delle radici e servirsi del teorema enunciato qui di seguito per l'assegnazione dei poli del sistema a retroazione (problema più forte di quello della stabilizzazione).

Teorema *Dato un processo di ordine n, esiste sempre un controllore proprio di ordine n-1 che stabilizza asintoticamente il sistema.*

Basterà, in questo caso, costruire il compensatore in modo parametrico e risolvere il sistema di equazioni che si ottiene imponendo la coincidenza del denominatore della funzione di trasferimento ad anello chiuso con un polinomio prefissato.

Per un processo $P(s)$ di ordine n, basterà imporre un controllore di ordine $n-1$ così fatto

$$G(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + ... + b_1 s + b_0}{s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + ... + a_1 s + a_0}$$

caratterizzato da $2n-1$ parametri da scegliere.

In questo modo si ha, sul ramo diretto, una funzione di trasferimento $F(s) = G(s)P(s)$ con $2n-1$ poli e lo stesso si ha per la funzione di trasferimento del sistema a ciclo chiuso $W(s)$.

Basterà imporre l'uguaglianza tra il denominatore di $W(s)$ ed un polinomio prefissato e tale uguaglianza si ridurrà ad un sistema di $2n-1$ equazioni lineari nei $2n-1$ parametri liberi. Si può mostrare che tale sistema ha sempre soluzione, a patto che numeratore e denominatore di $P(s)$ siano primi tra loro.

Riferimenti bibliografici

[1] A. Isidori, Sistemi di controllo, Siderea, 1992.