Corso di Controlli Automatici
Proff. M. D. Di Benedetto e S. Di Gennaro

Esercitazione del 31/5/2011

Ing. Alessandro Borri, Prof. Giordano Pola
{alessandro.borri,giordano.pola}@univaq.it

1 Osservatore Ridotto

Dato un sistema lineare stazionario a dimensione finita S, l'osservatore ridotto è un osservatore asintotico la cui dimensione dello spazio di stato è più piccola della dimensione dello spazio di stato dell'osservatore asintotico classico. Più precisamente, consideriamo il seguente sistema lineare tempo continuo

$$\begin{cases} dx/dt = Ax + Bu, x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, \\ y = Cx, y \in \mathbb{R}^p, \end{cases} \tag{1}$$

e supponiamo inizialmente che la matrice C abbia rango $p < n$. Esiste una opportuna trasformazione di coordinate $\tilde{x} = Tx$ dello spazio di stato $\mathbb{R}^n$, per cui è possibile riscrivere il sistema (1) nella seguente forma:

$$\begin{cases} d\tilde{x}/dt = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u \\ y = \tilde{C}\tilde{x}, \end{cases}$$

dove:

$$\tilde{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \tilde{B} = TB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \tilde{C} = CT^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix},$$

e $A_{11} \in \mathbb{R}^{p\times p}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{p\times m}$, $I \in \mathbb{R}^{p\times p}$. Dunque definendo $\tilde{x} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix}$, si ha:

$$y = \tilde{x}_1. \tag{2}$$

La seconda componente $\tilde{x}_2$ di $\tilde{x}$, può essere stimata per mezzo di un osservatore asintotico. Per fare ciò consideriamo la dinamica di $\tilde{x}_2$:

$$dx_2/dt = A_{22}\tilde{x}_2 + A_{21}\tilde{x}_1 + B_2 u.$$

Un osservatore per tale sistema è dato da:

$$\begin{cases} d\tilde{\xi}/dt = (A_{22} - NA_{12})\tilde{\xi} + My + Lu, \\ \tilde{\eta}_2 = \tilde{\xi} + Ny, \end{cases} \tag{3}$$

dove $\tilde{\eta}_2$ restituisce la stima della componente $\tilde{x}_2$ di $\tilde{x}$,

$$L = B_2 - NB_1;$$
$$M = A_{21} - NA_{11} + A_{22}N - NA_{12}N,$$

e la matrice N è tale che la matrice:

$$A_{22} - NA_{12},$$

sia asintoticamente stabile.

E' possibile dimostrare che la coppia (A, C) è osservabile (risp. rilevabile) se e solo se la coppia (A_{22}, A_{12}) è osservabile (risp. rilevabile). Pertanto la sintesi di N può essere fatta per mezzo della formula di Ackermann. Infatti, posto $p(\lambda)$ il polinomio degli autovalori da assegnare, la matrice N che assegna al sistema ridotto gli autovalori desiderati, è data da:

$$N = p(A_{22})\,\gamma,$$

dove γ è l'ultima colonna della matrice:

$$\begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{12}A_{22} \\ \dots \\ A_{12}A_{22}^{p-1} \end{pmatrix}^{-1}.$$

Mettendo insieme le stime di (2) e (3) si ottiene:

$$\begin{cases} d\tilde{\xi}/dt = (A_{22} - NA_{12})\tilde{\xi} + My + Lu, \\ \begin{bmatrix} \tilde{\eta}_1 \\ \tilde{\eta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \tilde{\xi} + \begin{bmatrix} I \\ N \end{bmatrix} y, \end{cases}$$

dove il vettore $\tilde{\eta} = \begin{bmatrix} \tilde{\eta}_1 \\ \tilde{\eta}_2 \end{bmatrix}$, restituisce una stima di $\tilde{x}$. Infine tenendo conto del cambiamento di coordinate, si ottiene il seguente osservatore ridotto per il sistema (1):

$$\begin{cases} d\tilde{\xi}/dt = (A_{22} - NA_{12})\tilde{\xi} + My + Lu, \\ \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = T^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \tilde{\xi} + T^{-1} \begin{bmatrix} I \\ N \end{bmatrix} y, \end{cases}$$

dove η fornisce la stima dello stato x del sistema (1).
Consideriamo infine il caso in cui il rango di C è $p' < p$. In questo caso esistono evidentemente $p - p'$ componenti del vettore di uscita y che sono linearmente dipendenti dalle restanti p' componenti e dunque non aggiungono informazione al controllore. In questo caso esiste una trasformazione di coordinate $\tilde{x} = Tx$ dello spazio di stato $\mathbb{R}^n$, per cui è possibile riscrivere il sistema (1) nella seguente forma:

$$\begin{cases} d\tilde{x}/dt = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u \\ y = \tilde{C}\tilde{x}, \end{cases} \tag{4}$$

dove:

$$\tilde{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \tilde{B} = TB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \tilde{C} = CT^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ C' & 0 \end{bmatrix},$$

dove $I \in \mathbb{R}^{p' \times p'}$. Partizionando lo stato e l'uscita del sistema (4) come $\tilde{x} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix}$ e $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$, si ottiene:

$$\begin{cases} d\tilde{x}/dt = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u \\ y_1 = \tilde{x}_1, \\ y_2 = C'\tilde{x}_1 \end{cases}$$

Siccome la seconda componente y_2 dell'uscita y può essere ottenuta come combinazione lineare della prima componente y_1 di y, può essere eliminata e dunque un osservatore per (4) può essere ottenuto come osservatore del sistema

$$\begin{cases} d\tilde{x}/dt = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u \\ y_1 = \tilde{x}_1. \end{cases}$$

in cui $y_1 = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} y$. Dunque questo caso più generale può essere ricondotto al caso speciale trattato in precedenza in cui si supponeva che la matrice C avesse rango $p < n$.

Esercizio 1 *Dato il seguente sistema lineare*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - 3x_3 \\ \dot{x}_2 = -2x_1 + x_3 + 2u \\ \dot{x}_3 = -x_2 - 3x_3 + u \\ y_1 = \ x_2 + 2x_3 \\ y_2 = x_2 - 2x_3, \end{cases} \tag{5}$$

Si progetti un osservatore ridotto con autovalori in $\lambda^* = -3$.

Svolgimento - Le matrici dinamiche associate al sistema (5) sono date da:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Prima di costruire l'osservatore ridotto verifichiamo la proprietà di osservabilità del sistema (5). La matrice di osservabilità è:

$$O = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & -5 \\ & . & \\ & . & \\ & . & \end{pmatrix}.$$

E' dunque evidente che il sistema (5) è osservabile. Per costruire un osservatore ridotto dobbiamo trovare una trasformazione dello spazio di stato $\tilde{x} = Tx$ tale che $CT^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix}$, dove I è una matrice identità $p \times p$, e p é il rango della matrice C. Dunque vogliamo trovare una matrice T^{-1} tale che:

$$CT^{-1} = \tilde{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Per determinare T^{-1} possiamo sfruttare la particolare forma di C. Consideriamo innanzitutto una trasformazione $x_1 = T_1 x$ tale che:

$$T_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si osservi innanzitutto che $det\,(T_1) \neq 0$ ed inoltre questa trasformazione scambia le colonne di C, in modo da ottenere:

$$C_1 = CT_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

A questo punto possiamo applicare una seconda trasformazione di coordinate $x_2 = T_2 x_1$ in modo da ottenere:

$$C_2 = C_1 T_2^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix}.$$

Per fare ciò si osservi che l'inversa della matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix},$$

è:

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & -1/4 \end{bmatrix},$$

e dunque la matrice di trasformazione richiesta è:

$$T_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Riassumendo, la matrice di trasformazione T cercata, è data da:

$$T^{-1} = T_1^{-1}T_2^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & -1/4 & 0 \end{bmatrix},$$

da cui si ottiene:

$$T = T_2 T_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Applicando infine la trasformazione $\tilde{x} = Tx$ al sistema (5), si ottiene un sistema lineare

$$\begin{cases} d\tilde{x}/dt = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u \\ y = \tilde{C}\tilde{x}, \end{cases}$$

le cui matrici dinamiche sono date da:

$$\tilde{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} -9/4 & 1/4 & -2 \\ 11/4 & -3/4 & -2 \\ -1/4 & 5/4 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{B} = TB = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{C} = CT^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Costruiamo adesso l'osservatore ridotto. Posto $p(\lambda)$ il polinomio degli autovalori da assegnare, la matrice $\tilde{N}$ che assegna al sistema ridotto gli autovalori desiderati è data dalla formula di Ackermann:

$$\tilde{N} = p(A_{22})\,\gamma,$$

In alternativa è possibile ricavare la matrice $\tilde{N}$ direttamente da $A_{22} - \tilde{N}A_{12}$; infatti essendo le matrici:

$$A_{22} = 0;\ A_{12} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix};$$

e ponendo $\tilde{N} = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 \end{bmatrix} \in R^{1\times 2}$, si ottiene:

$$\left(A_{22} - \tilde{N}A_{12}\right) = -3,$$

da cui banalmente:

$$n_1 + n_2 = -3/2.$$

Scegliamo ad esempio: $n_1 = -3/2$; $n_2 = 0$. Considerando le sottomatrici:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} -9/4 & 1/4 \\ 11/4 & -3/4 \end{bmatrix};\quad A_{21} = \begin{bmatrix} -1/4 & 5/4 \end{bmatrix}; B_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}; B_2 = 0;$$

é possibile calcolare esplicitamente l'espressione delle matrici $\tilde{L}$ ed $\tilde{M}$ ottenendo:

$$\begin{aligned} \tilde{L} &= B_2 - \tilde{N}B_1 = 6 \\ \tilde{M} &= A_{21} - \tilde{N}A_{11} + A_{22}\tilde{N} - \tilde{N}A_{12}\tilde{N} = \left[\begin{array}{cc} 7/8 & 13/8 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Possiamo finalmente scrivere l'espressione dell'osservatore ridotto dove $\tilde{\eta}_2$ è la stima della seconda componente $\tilde{x}_2$ di $\tilde{x}$:

$$\begin{cases} d\tilde{\xi}/dt = -3\tilde{\xi} + \left[\begin{array}{cc} 7/8 & 13/8 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \end{array} \right] + 6u \\ \left[\begin{array}{c} \tilde{\eta}_1 \\ \tilde{\eta}_2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right] \tilde{\xi} + \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -3/2 & 0 \end{array} \right] y \end{cases}$$

Infine tenendo conto della trasformazione T dello spazio di stato, un osservatore ridotto che verifica le specifiche richieste dall'esercizio è dato da:

$$\begin{cases} d\tilde{\xi}/dt = -3\tilde{\xi} + \left[\begin{array}{cc} 7/8 & 13/8 \end{array} \right] y + 6u \\ \eta = T^{-1} \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right] \tilde{\xi} + T^{-1} \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -3/2 & 0 \end{array} \right] y = \\ \quad = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \tilde{\xi} + \left[\begin{array}{cc} -3/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & -1/4 \end{array} \right] y. \end{cases}$$

Esercizio 2 *Dato il sistema lineare tempo continuo:*

$$\left\{ \begin{array}{l} dx/dt = Ax + Bu, x \in \mathbb{R}^3, u \in \mathbb{R} \\ y = Cx, y \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right. \tag{6}$$

dove:

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 0 \\ -2 & -6 & 2 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix},$$

si chiede di progettare un osservatore ridotto.

Svolgimento - Prima di costruire l'osservatore ridotto verifichiamo la proprietà di osservabilità e/o rilevabilità del sistema (6). Essendo gli autovalori A:

$$\lambda_1^A = -2; \quad \lambda_2^A = -4; \quad \lambda_3^A = -6 \ ,$$

dunque tutti asintoticamente stabili, il sistema (6) è rilevabile. A questo punto dobbiamo studiare una trasformazione di coordinate $\tilde{x} = Tx$ che porti il sistema (6) in un sistema equivalente tale che:

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ C' & 0 \end{bmatrix}$$

dove I_r è la matrice identità $r \times r$ ed $r = \rho(C)$. Dunque nel nostro caso $r = 1$, ed inoltre le due righe della matrice C sono dipendenti per cui ai fini della costruzione di un osservatore le informazioni provenienti dalla prima componente sono le medesime delle informazioni provenienti dalla seconda componente dell'uscita. Dunque:

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = CT^{-1}$$

e dunque

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

da cui

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

e quindi:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Applicando la trasformazione $\tilde{x} = Tx$ al sistema (6), si ottiene un sistema le cui matrici dinamiche sono date da:

$$\tilde{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \\ -2 & -4 & -8 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{B} = TB = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{C} = CT^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

da cui:

$$A_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -4 & -8 \end{bmatrix}; A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Applichiamo la formula di Ackermann, imponendo per esempio un polinomio $p(\lambda) = (\lambda + 2)^2$, otteniamo:

$$N = p\left(A_{22}\right)\gamma$$

dove γ è l'ultima colonna della matrice:

$$\begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{12}A_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 8 & 16 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1/8 \\ -1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

e dunque:

$$N = \begin{bmatrix} -12 & -16 \\ 16 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/8 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

L'osservatore ridotto è dato da:

$$\begin{cases} \begin{cases} \dot{\xi} = \left(A_{22} - NA_{12}\right)\xi + My_1 + Lu \\ w = \xi + Ny_1 \end{cases} \\ x_1 = y_1 \end{cases} \tag{7}$$

dove:

$$L = B_2 - NB_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -8 \end{bmatrix}$$

$$M = A_{21} - NA_{11} + A_{22}N - NA_{12}N = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

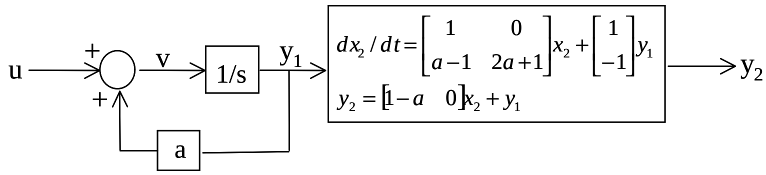
A questo punto tenendo conto del fatto che

$$y_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} y,$$

e del cambiamento di base, otteniamo:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \left(A_{22} - NA_{12}\right)\xi + My + Lu \\ \eta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \xi + \begin{bmatrix} 1 \\ N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} y \right) = \\ \quad = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \xi + \begin{bmatrix} 3/2 \\ 2 \\ 3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} y \end{cases}$$

Esercizio 3 *Dato il sistema:*



(i) *trovare i valori del parametro a affinchè esista un osservatore ridotto dello stato;*

(ii) *trovare i valori del parametro a affinchè esista un osservatore ridotto dello stato che converga allo stato del sistema con velocità pari a quella di* e^{-t}*;*

(iii) *determinare l'espressione dell'osservatore ridotto di cui al punto (ii).*

Svolgimento - L'interconnessione del processo in figura ammette come rappresentazione con lo spazio di stato i seguenti sistemi:

$$S_1 : \begin{cases} dx_1/dt = ax_1 + u \\ y_1 = x_1 \end{cases}$$
$$S_2 : \begin{cases} dx_2/dt = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a-1 & 2a+1 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} y_1 \\ y_2 = \begin{bmatrix} 1-a & 0 \end{bmatrix} x_2 \end{cases}$$

da cui si ottiene:

$$\begin{cases} dx/dt = Ax + Bu, x \in \mathbb{R}^3, u \in \mathbb{R} \\ y = Cx, y \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{8}$$

dove:

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & a-1 & 2a+1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1-a & 0 \end{bmatrix}$$

Gli autovalori della matrice A sono:

$$\lambda_1 = a,$$
$$\lambda_2 = 1,$$
$$\lambda_3 = 2a+1.$$

Applichiamo il PBH Test per verificare la rilevabilità del sistema in esame.

$$\rho\begin{pmatrix} A - \lambda_1 I \\ C \end{pmatrix} = \rho\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1-a & 0 \\ -1 & a-1 & a+1 \\ 1 & 1-a & 0 \end{pmatrix} < 3;$$

$$\rho\begin{pmatrix} A - \lambda_2 I \\ C \end{pmatrix} = \rho\begin{pmatrix} a-1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & a-1 & 2a \\ 1 & 1-a & 0 \end{pmatrix} = 3 \quad \Leftrightarrow a \neq 0, 1;$$

$$\rho\begin{pmatrix} A - \lambda_3 I \\ C \end{pmatrix} = \rho\begin{pmatrix} -a-1 & 0 & 0 \\ 1 & -2a & 0 \\ -1 & a-1 & 0 \\ 1 & 1-a & 0 \end{pmatrix} < 3.$$

Risulta evidente imporre $a \neq 0, 1$ ed inoltre:

$$\lambda_1 < 0 \Leftrightarrow a < 0,$$
$$\lambda_3 < 0 \Leftrightarrow a < -1/2.$$

Dunque il punto (i) è risolto se e solo se $a < -1/2$. Inoltre il punto (ii) è risolto se e solo se $a = -1$. Per costruire l'osservatore ridotto occorre trovare una trasformazione di coordinate $\tilde{x} = Tx$ che porti la matrice C in $CT^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Si ottiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

da cui:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Applicando infine la trasformazione $\tilde{x} = Tx$ al sistema (8), si ottiene un sistema le cui matrici dinamiche sono date da:

$$\tilde{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$
$$\tilde{B} = TB = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$
$$\tilde{C} = CT^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

da cui:

$$A_{22} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Dunque è facile verificare che in questo caso è possibile scegliere $N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$ e dunque:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = A_{22}\xi + My + Lu \\ w = \xi \end{cases}$$

dove:

$$L = B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$M = A_{21} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Infine bisogna tener conto del cambiamento di coordinate; lasciamo questa parte conclusiva come esercizio.

Esercizio 4 (Homework con soluzione) *Dato il sistema lineare tempo continuo:*

$$\begin{cases} dx/dt = Ax + Bu, x \in \mathbb{R}^3, u \in \mathbb{R}, \\ y = Cx, y \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{9}$$

dove:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -4 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

si chiede di progettare un osservatore ridotto.

Svolgimento - Prima di costruire l'osservatore ridotto verifichiamo la proprietà di osservabilità e/o rilevabilità del sistema (9). La matrice di osservabilità associata a tale sistema è data:

$$O = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dunque il sistema (9) non è osservabile. Troviamo la forma canonica di osservabilità associata al sistema (9). Il sottospazio degli stati inosservabili è dato da:

$$\mathcal{I} = span\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Una matrice di trasformazione che porti il sistema nella forma desiderata è data da:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

da cui si ottiene:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dunque:

$$\begin{cases} d\tilde{x}/dt = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u \\ y = \tilde{C}\tilde{x}, \end{cases} \tag{10}$$

dove:

$$\tilde{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{B} = TB = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{C} = CT^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pertanto l'autovalore relativo alla dinamica non osservabile è $\lambda_3 = -1$, e dunque il sistema (9) è rilevabile. Costriamo un osservatore ridotto per il sistema (10).

A questo punto bisogna trovare una matrice di trasformazione T_1 che porti la matrice $\tilde{C}$ in $\tilde{C}T_1^{-1} = \left[\begin{array}{cc} I & 0 \end{array}\right]$. Dunque:

$$\left[\begin{array}{ccc} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cc} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{array}\right]^{-1} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \\ \begin{array}{cc} 0 & 0 \end{array} & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right],$$

e pertanto,

$$T_1^{-1} = \left[\begin{array}{rrr} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

da cui si ottiene:

$$T_1 = \left[\begin{array}{ccc} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Applicando infine la trasformazione $x' = T_1\tilde{x}$ al sistema (9), si ottiene un sistema le cui matrici dinamiche sono date da:

$$\begin{aligned}
A_1 = T_1\tilde{A}T_1^{-1} &= \left[\begin{array}{ccc} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{rrr} 3 & 2 & 0 \\ -4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{rrr} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{rrr} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right], \\
B_1 = T_1\tilde{B} &= \left[\begin{array}{ccc} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{r} 1 \\ -2 \\ -1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{r} -1 \\ 0 \\ -1 \end{array}\right], \\
C_1 = \tilde{C}T_1^{-1} &= \left[\begin{array}{ccc} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{rrr} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right],
\end{aligned}$$

da cui:

$$A_{22} = -1.$$

Dunque è facile verificare che in questo caso è possibile scegliere $N = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \end{array}\right]$ e dunque:

$$\left\{\begin{array}{l} d\tilde{\xi}/dt = A_{22}\tilde{\xi} + My + Lu \\ \tilde{\eta}_2 = \tilde{\xi} \end{array}\right.$$

dove:

$$\begin{array}{l} L = B_2 = 1, \\ M = A_{21} = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \end{array}\right]. \end{array}$$

Tenendo conto della trasformazione di coordinate, è possibile costruire un osservatore ridotto per il sistema (9), come segue:

$$\left\{\begin{array}{l} d\tilde{\xi}/dt = -\tilde{\xi} + u \\ \eta = T^{-1}T_1^{-1}\left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right]\tilde{\xi} + T^{-1}T_1^{-1}\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array}\right] y \\ \quad = \left[\begin{array}{r} -1 \\ 1 \\ 1 \end{array}\right]\tilde{\xi} + \left[\begin{array}{rr} -1 & 2 \\ 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{array}\right] y. \end{array}\right.$$