Corso di Controlli Automatici
Proff. M. D. Di Benedetto e S. Di Gennaro

Esercitazione del 25/5/2011

Ing. Alessandro Borri
alessandro.borri@univaq.it

Esercizi di riepilogo

Esercizio 1 *Dato il sistema lineare tempo continuo:*

$$\begin{cases} dx/dt = Ax + Bu, x \in \mathbb{R}^3, u \in \mathbb{R} \\ y = Cx, y \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1}$$

dove:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a^2-3 & 0 \\ 1 & -2 & a^2+3a \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} a-1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R}.$$

(i) *trovare i valori del parametro a affinchè esista un osservatore asintotico dello stato per il sistema (1);*

(ii) *trovare i valori del parametro a affinchè il sistema (1) sia stabilizzabile con una retroazione dinamica dall'uscita;*

(iii) *trovare i valori del parametro a affinchè esista un controllore dinamico con retroazione dall'uscita che assegni gli autovalori al processo controllato coincidenti in -2;*

(iv) *trovare l'espressione di un controllore che risolva il punto (iii).*

Svolgimento - Innanzitutto conviene studiare quali autovalori della matrice A sono raggiungibili e non ed osservabili e non. Gli autovalori della matrice A sono:

$$\lambda_1 = 1,$$
$$\lambda_2 = a^2 - 3,$$
$$\lambda_3 = a^2 + 3a.$$

Per studiare l'osservabilità applichiamo il PBH Test:

$$\rho\begin{pmatrix} A-\lambda_1 I \\ C \end{pmatrix} = \rho\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & a^2-4 & 0 \\ 1 & -2 & a^2+3a-1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3, \text{ se e solo se } a \neq -\tfrac{3}{2} \pm \tfrac{\sqrt{13}}{2}.$$

$$\rho\begin{pmatrix} A-\lambda_2 I \\ C \end{pmatrix} = \rho\begin{pmatrix} -a^2-2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3a-2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3, \text{ se e solo se } a \neq \tfrac{2}{3}.$$

$$\rho\begin{pmatrix} A-\lambda_3 I \\ C \end{pmatrix} = \rho\begin{pmatrix} -a^2-3a+1 & 1 & 0 \\ 0 & -3a-3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} < 3, \text{ per ogni valore di } a.$$

Per quanto riguarda le proprietà di raggiungibilità si osservi che se il vettore di stato è $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}'$, possiamo riscrivere il sistema (1) per mezzo di una trasformazione di coordinate

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_2 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

dove

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e dunque

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il sistema nelle nuove coordinate è

$$\begin{cases} d\tilde{x}/dt = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & a^2+3a & -2 \\ 0 & 0 & a^2-3 \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} a-1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u, \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{x} \end{cases}$$

ed è in forma canonica di raggiungibilità. In particolare si osservi che l'autovalore $\lambda_2 = a^2 - 3$ è non raggiungibile. Calcolando la matrice di raggiungibilità associata al sottosistema di variabili di stato x_1 e x_3:

$$R_{1,3} = \begin{bmatrix} a-1 & a-1 \\ 0 & a-1 \end{bmatrix}$$

si ottiene che gli autovalori λ_1 e λ_3 sono raggiungibili se e solo se $a \neq 1$.
Riassumendo l'analisi finora svolta si ottiene:

- λ_1 è un autovalore osservabile se $a \neq -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2}$ ed è raggiungibile se e solo se $a \neq 1$,
- λ_2 è un autovalore osservabile se $a \neq \frac{2}{3}$ e non raggiungibile,
- λ_3 è un autovalore non osservabile ed è raggiungibile se e solo se $a \neq 1$,

Da questa analisi preliminare è possibile risolvere i quesiti richiesti come segue.
(i) I valori del parametro a per cui esista un osservatore asintotico dello stato sono quelli per cui il sistema (1) è rilevabile e pertanto se e solo se $a \neq -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2}$ e $\lambda_3 = a^2 + 3a < 0$. Dunque:

$$a \in (-3, 0).$$

(ii) I valori del parametro a per cui il sistema (1) è stabilizzabile con una retroazione dinamica dall'uscita sono quelli per cui gli autovalori non osservabili e non raggiungibili sono a parte reale negativa. Essendo $\lambda_1 > 0$ risulta evidente imporre $a \neq -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2}$, $a \neq 1$ ed inoltre,

$$\begin{array}{ccc} \lambda_2 < 0 & \iff & a \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3}), \\ \lambda_3 < 0 & \iff & a \in (-3, 0). \end{array}$$

Dunque le specifiche del punto ii) sono verificate se e solo se:

$$a \in (-\sqrt{3}, 0).$$

(iii) I valori del parametro a per cui esista un controllore dinamico con retroazione dinamica dall'uscita che assegni gli autovalori al processo controllato coincidenti in -2 sono quelli per cui gli autovalori non raggiungibili e non osservabili sono coincidenti in -2. Anche in questo caso risulta evidente imporre

$$a \neq -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2}, \ a \neq 1 \tag{2}$$

ed inoltre:

$$\begin{array}{ccc} \lambda_2 = a^2 - 3 = -2 & \iff & a = -1, 1, \\ \lambda_3 = a^2 + 3a = -2 & \iff & a = -1, -2. \end{array} \tag{3}$$

Intersencando le condizioni (2) e (3), si ottiene:

$$a = -1.$$

(iv) Le matrici dinamiche del sistema (1) per $a = -1$ sono:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Utilizzando il principio di separazione e la formula di Ackermann è possibile sintetizzare le matrici H e G per cui il controllore

$$\begin{cases} d\xi/dt = (A - GC + BH)\xi + Gy, \\ u = H\xi, \end{cases}$$

verifichi le specifiche di cui al punto iii). Le dinamiche relative agli autovalori raggiungibili sono date da

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} dx_1/dt \\ dx_3/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} u, \\ \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x, \end{cases}$$

cui è associata una matrice di raggiungibilità

$$R_{1,3} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Ricordando la formula di Ackermann $H_{1,3} = -\mu p(A_{11})$, dove $p(\lambda) = (\lambda + 2)^2$ e μ è l'ultima riga di

$$R_{1,3}^{-1} = 1/4 \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix},$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} H_{1,3} &= -1/4 \begin{bmatrix} 0 & -2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^2 \\ &= -1/4 \begin{bmatrix} 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Dunque:

$$H = \begin{bmatrix} 3/2 & h_2 & 0 \end{bmatrix}, h_2 \in \mathbb{R}.$$

Inoltre le dinamiche relative agli autovalori osservabili sono date da:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} dx_1/dt \\ dx_2/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} u, \\ \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x, \end{cases}$$

cui è associata la matrice di osservabilità

$$O_{1,2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ricordando la formula di Ackermann $G = p(A_{11}) \cdot \mu$, dove $p(\lambda) = (\lambda + 2)^2$ e μ è l'ultima colonna di

$$O_{1,2}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

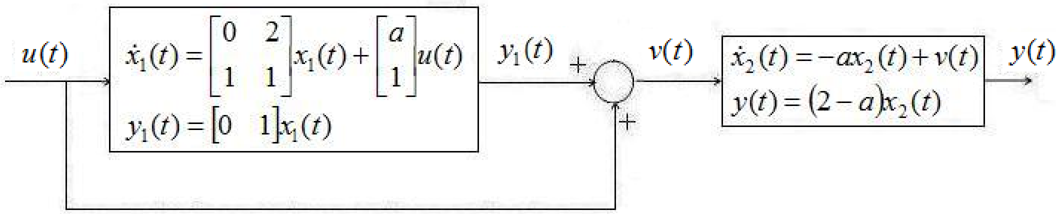
si ottiene:

$$\begin{aligned} G_{1,2} &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Infine, tenendo conto anche della dinamica inosservabile si ottiene:

$$G = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ g \end{bmatrix}, g \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 2 *Dato il sistema:*



dove a è un parametro reale. Si chiede di:

(i) *Determinare una rappresentazione con lo spazio di stato del processo in figura.*

(ii) *Determinare i valori del parametro a affinchè sia possibile stabilizzare asintoticamente il processo per mezzo di una retroazione dinamica dall'uscita.*

(iii) Porre $a = 1$ e determinare se esiste un controllore con retroazione dinamica dall'uscita tale che il processo controllato abbia tutti gli autovalori coincidenti. In caso affermativo, procedere alla sintesi di tale controllore.

Svolgimento - Per risolvere il punto (i), si scrivono le equazioni del processo a monte:

$$\begin{cases} \dot{x}_{11} = 2x_{12} + au \\ \dot{x}_{12} = x_{11} + x_{12} + u \\ y_1 = x_{12} \end{cases}$$

e del processo a valle

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = -ax_2 + v \\ y = (2-a)\, x_2 \end{cases}$$

Eliminando le variabili intermedie

$$v = y_1 + u = x_{12} + u$$

si ottiene, per la cascata, la rappresentazione con lo spazio di stato:

$$\begin{cases} dx/dt = Ax + Bu, x \in \mathbb{R}^3, u \in \mathbb{R}, \\ y = Cx, y \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{4}$$

dove:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -a \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2-a \end{bmatrix}.$$

Per risolvere il punto (ii) applichiamo il PBH Test. Gli autovalori relativi alla matrice A sono:

$$\lambda_1 = -a; \quad \lambda_2 = 2; \quad \lambda_3 = -1.$$

Applichiamo il PBH Test agli autovalori λ_1 e λ_2:

$$\rho\begin{pmatrix} A - \lambda_1 I & B \end{pmatrix} = \rho\begin{pmatrix} a & 2 & 0 & a \\ 1 & a+1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 \Longleftrightarrow a \neq -2 \text{ o } a \neq 1.$$

$$\rho\begin{pmatrix} A - \lambda_1 I \\ C \end{pmatrix} = \rho\begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ 1 & a+1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-a \end{pmatrix} = 3 \Longleftrightarrow \; a \neq 2.$$

$$\rho\left(\begin{array}{cc} A-\lambda_2 I & B \end{array}\right) = \rho\left(\begin{array}{cccc} -1 & 2 & 0 & a \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -a-2 & 1 \end{array}\right) = 3\ \forall a \in \mathbb{R}.$$

$$\rho\left(\begin{array}{c} A-\lambda_2 I \\ C \end{array}\right) = \rho\left(\begin{array}{ccc} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -a-2 \\ 0 & 0 & 2-a \end{array}\right) = 3\ \forall a \in \mathbb{R}.$$

Si noti che gli autovalori λ_2 e λ_3 non creano problemi, xchè λ_2 è raggiungibile ed osservabile mentre λ_3 è negativo. Per quanto riguarda l'autovalore restante λ_1, si ha:

- se $a = -2$, allora $\lambda_1 = 2$ ed è non raggiungibile ed instabile;
- se $a = 1$, allora $\lambda_1 = -1$ ed è non raggiungibile ma stabile;
- se $a = 2$, allora $\lambda_1 = -2$ ed è non osservabile ma stabile.

Di conseguenza, l'unico caso che crea problemi è il primo dei tre, dunque il punto (ii) ha soluzione se e solo se

$$a \neq -2.$$

Per risolvere il punto (iii) si ponga $a = 1$, così da ottenere le matrici dinamiche

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La discussione di cui al punto (ii) mostra che il caso $a = 1$ causa la perdita di raggiungibilità dell'autovalore $\lambda_1 = -1$, che quindi non si può "spostare". L'unica possibilità è quindi mettere tutti gli autovalori a ciclo chiuso in -1.

La matrice di raggiungibilità associata al processo è data da:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Lo spazio degli stati raggiungibili dall'origine è dato da:

$$\mathcal{P} = span\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Una matrice di trasformazione che porti il sistema in forma canonica di raggiungibilità è data da:

$$T_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow T_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Da cui si ottiene:

$$\tilde{A} = T_1 A T_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{B} = T_1 B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{C} = C T_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Le dinamiche relative agli autovalori raggiungibili sono caratterizzate dalle seguenti matrici:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Applichiamo le formule di Ackermann:

$$\begin{aligned} R_{11} = \begin{bmatrix} B_1 & A_{11}B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} &\Rightarrow R_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \mu_{r1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ p(A_{11}) = (A_{11}+I)^2 &= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \\ K_1 = -\mu_{r1} p(A_{11}) &= -\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Tenendo conto della dinamica non raggiungibile e del cambiamento di coordinate, si ottiene:

$$K = \begin{bmatrix} -3 & 0 & k \end{bmatrix} T_1 = \begin{bmatrix} -3 & 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k-3 & 0 \end{bmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

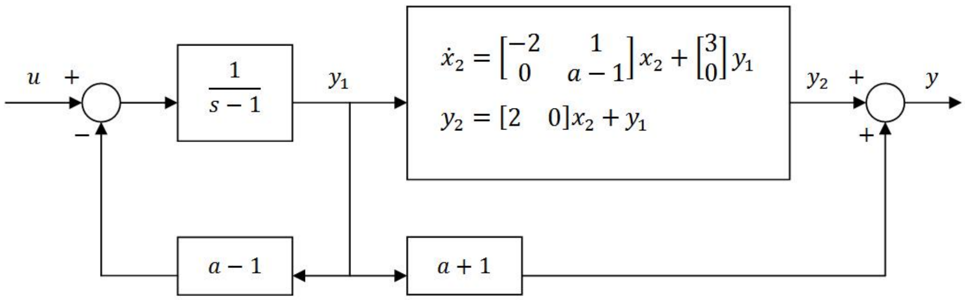
La matrice di osservabilità associata al processo è data da:

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow O^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \mu_o = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

da cui si conclude

$$\begin{aligned} p(A) = (A+I)^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^3 &= \begin{bmatrix} 9 & 18 & 0 \\ 9 & 18 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}, \\ G = p(A)\mu_o = \begin{bmatrix} 9 & 18 & 0 \\ 9 & 18 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Esercizio 3 *Si consideri il seguente sistema interconnesso:*



dove a è un parametro reale. Si chiede di:

(i) Determinare una rappresentazione con lo spazio di stato del sistema in figura;

(ii) Determinare i valori del parametro a affinchè sia possibile stabilizzare il sistema per mezzo di una retroazione dinamica dall'uscita;

(iii) Determinare i valori del parametro a affinchè sia possibile imporre gli autovalori del processo a ciclo chiuso coincidenti in -3.

(iv) Determinare un controllore che verifichi le specifiche di cui al punto (iii).

Svolgimento - L'interconnessione del processo in figura ammette come rappresentazione con lo spazio di stato:

$$\begin{cases} dx/dt = Ax + Bu, x \in \mathbb{R}^3, u \in \mathbb{R} \\ y = Cx, \ y \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{5}$$

dove:

$$A = \begin{bmatrix} 2-a & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} a+2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Gli autovalori della matrice A sono:

$$\lambda_1 = 2-a,$$
$$\lambda_2 = -2,$$
$$\lambda_3 = a-1.$$

Per risolvere il punto (ii) applichiamo il PBH Test ai soli autovalori λ_1 e λ_3:

$$\rho \begin{pmatrix} A - \lambda_1 I \\ C \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & a-4 & 1 \\ 0 & 0 & 2a-3 \\ a+2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 3, \text{ se e solo se } a \neq 3/2.$$

$$\rho \begin{pmatrix} A - \lambda_1 I & B \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & a-4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2a-3 & 0 \end{pmatrix} = 3, \text{ se e solo se } a \neq 3/2.$$

$$\rho\begin{pmatrix} A-\lambda_3 I \\ C \end{pmatrix} = \rho\begin{pmatrix} 3-2a & 0 & 0 \\ 3 & -a-1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ a+2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 3, \text{ se e solo se } a \neq 3/2.$$

$$\rho\begin{pmatrix} A-\lambda_3 I & B \end{pmatrix} = \rho\begin{pmatrix} 3-2a & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -a-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} < 3, \text{ pero ogni } a \in \mathbb{R}.$$

Dunque è possibile stabilizzare il processo per mezzo di una retroazione dinamica dall'uscita se e solo se:

$$a < 1.$$

Studiamo adesso il punto (iii). L'autovalore λ_3 è non raggiungibile e dunque bisogna imporre $\lambda_3 = a-1 = -3$, da cui si ottiene $a = -2$. Per $a = -2$ l'autovalore λ_1 è sia raggiungibile che osservabile. Applichiamo il PBH Test all'autovalore λ_2:

$$\rho\begin{pmatrix} A-\lambda_2 I \\ C \end{pmatrix} = \rho\begin{pmatrix} 4-a & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a-3 \\ a+2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 3, \text{ se e solo se } a \neq 3.$$

$$\rho\begin{pmatrix} A-\lambda_2 I & B \end{pmatrix} = \rho\begin{pmatrix} 4-a & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a-3 & 0 \end{pmatrix} = 3, \text{ se e solo se } a \neq 3.$$

Dunque il quesito (iii) ha soluzione se e solo se $a = -2$. Studiamo adesso il punto (iv). Il sistema per $a = -2$ è caratterizzato dalle seguenti matrici dinamiche:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il sistema è in forma canonica di raggiungibilità e le dinamiche raggiungibili sono date da:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

La matrice di raggiungibilità associata a questo sistema è data da:

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

la cui inversa è data da:

$$R_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -4/3 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

Da cio si ottiene che:

$$\mu = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

Inoltre:

$$p(A_1) = (A_1 + 3I)^2 = \begin{bmatrix} 49 & 0 \\ 24 & 1 \end{bmatrix}$$

e dunque applicando la formula di Ackermann si ottiene:

$$K_1 = -\mu p(A_1) = -\begin{bmatrix} 8 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

Infine tenendo conto della dinamica non raggiungibile si ottiene:

$$K = -\begin{bmatrix} 8 & 1/3 & k \end{bmatrix}, k \in \mathbb{R}.$$

La sintesi della matrice G puo' essere fatta seguendo lo stesso ragionamento.