Corso di Controlli Automatici
Proff. M. D. Di Benedetto e S. Di Gennaro

Esercitazione del 24/5/2011 - Parte 2

Ing. Alessandro Borri, Prof. Giordano Pola
{alessandro.borri,giordano.pola}@univaq.it

1 Il principio di separazione

Il principio di separazione permette di studiare la stabilizzazione con retroazione dinamica dall'uscita. Dato un sistema lineare tempo continuo:

$$\begin{cases} dx/dt = Ax + Bu, x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m \\ y = Cx, y \in \mathbb{R}^p \end{cases} \tag{1}$$

il problema è di progettare un controllore dinamico della forma:

$$\begin{cases} d\xi/dt = F\xi + Gy, \xi \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m \\ u = H\xi, y \in \mathbb{R}^p \end{cases} \tag{2}$$

che stabilizzi asintoticamente il sistema (1).
Per fare ciò riscriviamo il sistema (2) come osservatore:

$$\begin{cases} d\xi/dt = (A - GC + BH)\xi + Gy, \xi \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m \\ u = H\xi, y \in \mathbb{R}^p \end{cases} \tag{3}$$

da cui interconnettendo i sistemi (1) e (3), si ottiene:

$$\begin{bmatrix} dx/dt \\ d\xi/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & BH \\ GC & A - GC + BH \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix}$$

Operando adesso una trasformazione nello spazio di stato:

$$\begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix}$$

si ottiene:

$$\begin{bmatrix} dx/dt \\ de/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BH & -BH \\ 0 & A - GC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}.$$

Da ciò si ottengono i seguenti risultati:

Teorema 1 *Il sistema (1) è stabilizzabile asintoticamente per mezzo di una retroazione dinamica dall'uscita se e solo se è stabilizzabile e rilevabile.*

Teorema 2 *E' possibile assegnare ad arbitrio gli autovalori al sistema (1) per mezzo di una retroazione dinamica dall'uscita se e solo se il sistema (1) è raggiungibile e osservabile.*

La sintesi delle matrici G e H del controllore (3) può essere effettuata utilizzando le formula di Ackermann.

Esercizio 1 *Dato il seguente sistema lineare tempo continuo:*

$$\begin{cases} dx/dt = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u, x \in \mathbb{R}^2, u \in \mathbb{R}, \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x, y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Progettare un controllore dinamico con retroazione dall'uscita che assegni gli autovalori in -1.

Svolgimento - Studiamo innanzitutto le proprietà di raggiungibilità e osservabilità del processo.

$$R = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$
$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dunque il processo è raggiungibile ed osservabile e pertanto verifica le ipotesi del Teorema 2: dunque esiste un controllore che verifica le specifiche. Per calcolare tale controllore bisogna sintetizzare le matrici G e H del controllore dinamico (3) e per fare ciò utilizziamo la formula di Ackerman. Innanzitutto:

$$p(A) = (A+I)^2 = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$
$$R^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$O^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

da cui:

$$H = -\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -2 \end{bmatrix}$$
$$G = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 2 *Dato il sistema lineare tempo continuo:*

$$\left\{ \begin{array}{l} dx/dt = Ax + Bu, x \in \mathbb{R}^3, u \in \mathbb{R} \\ y = Cx, y \in \mathbb{R} \end{array} \right. \tag{4}$$

dove:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \end{bmatrix},$$

si chiede di progettare se esiste un controllore dinamico che stabilizzi asintoticamente il processo.

Svolgimento - Prima di tutto conviene studiare le proprietà di stabilizzabilità asintotica e di rilevabilità del sistema. Gli autovalori di A sono:

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -3.$$

Dunque il problema della stabilizzazione con retroazione dinamica dall'uscita ha soluzione se e solo se $\lambda_2 = 1$ è raggiungibile e osservabile. Verifichiamo tali proprietà per mezzo del PBH Test. Si ottiene:

$$\rho\left(\begin{bmatrix} A - \lambda_2 I & B \end{bmatrix}\right) = \rho\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}\right) = 3$$

$$\rho\left(\begin{bmatrix} A - \lambda_2 I \\ C \end{bmatrix}\right) = \rho\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}\right) = 3$$

e dunque il problema ha soluzione. Per sintetizzare tale controllore dobbiamo calcolare H e G. La matrice di osservabilità del processo è

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}$$

da cui:

$$\mathcal{I} = \mathcal{N}(O) = span \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Dunque una matrice T^{-1} invertibile che porti il sistema in forma canonica di osservabilità è

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

cui corrisponde una matrice T data da:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sulla base di T possiamo costruire la forma canonica di osservabilità:

$$\left\{ \begin{array}{l} d\tilde{x}/dt = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u \\ y = \tilde{C}\tilde{x}, \end{array} \right.$$

dove:

$$
\begin{aligned}
\tilde{A} &= TAT^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \\
\tilde{B} &= TB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}; \\
\tilde{C} &= CT^{-1} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Il sottosistema osservabile è:

$$
\begin{cases} dx_1/dt = x_1 + 2u \\ y_1 = 1/2x_1. \end{cases}
$$

da cui imponendo ad esempio una velocità di convergenza pari a quella di e^{-3t}, si ottiene

$$
A_{11} - g_1 C_1 = 1 - g_1 1/2 = -3 \Longleftrightarrow g_1 = 8,
$$

da cui:

$$
\tilde{G} = \begin{bmatrix} 8 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix}, g_2, g_3 \in \mathbb{R},
$$

cui corrisponde:

$$
G = T^{-1}\tilde{G} = \begin{bmatrix} 8 + g_3 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix}, g_2, g_3 \in \mathbb{R}.
$$

La matrice di raggiungibilità associata al processo è:

$$
R = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix},
$$

e dunque il sottospazio di raggiungibilità è:

$$
\mathcal{P} = span \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.
$$

Dunque scegliendo una matrice di trasformazione

$$
T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},
$$

è possibile portare il sistema (4) nella seguente forma canonica di raggiungibilità:

$$
\begin{cases} d\tilde{x}/dt = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u \\ y = \tilde{C}\tilde{x}, \end{cases}
$$

dove:

$$
\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tilde{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.
$$

Il sottosistema raggiungibile è:

$$\begin{cases} dx_1/dt = x_1 + u \\ y_1 = x_1. \end{cases}$$

da cui imponendo ad esempio l'autovalore del sistema a ciclo chiuso in -1 si ottiene con un controllore $u = h_1 x_1$

$$A_{11} + B_1 h_1 = 1 + h_1 = -1 \Longleftrightarrow h_1 = -2;$$

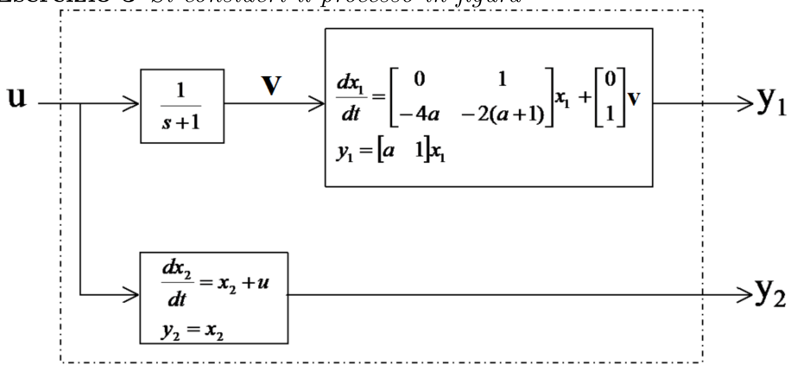
da cui

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} -2 & h_2 & h_3 \end{bmatrix}, h_2, h_3 \in \mathbb{R},$$

cui corrisponde una matrice H data da:

$$H = \tilde{H}T = \begin{bmatrix} h_3 & h_2 & 2 + h_3 \end{bmatrix}, h_2, h_3 \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 3 *Si consideri il processo in figura*



dove a è un parametro reale. Si trovino tutti i valori di a per cui esiste un controllore con retroazione dall'uscita che assegni gli autovalori al processo controllato coincidenti in -2.

Svolgimento - Una rappresentazione con lo spazio di stato associata al processo in figura è data da:

$$\begin{cases} dx/dt = Ax + Bu, \\ y = Cx. \end{cases}$$

dove:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4a & -2(a+1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Gli autovalori associati al sistema sono:

$$\lambda_1 = -1; \quad \lambda_2 = 1; \quad \lambda_3 = -2; \quad \lambda_4 = -2a.$$

Applichiamo il PBH Test agli autovalori λ_1, λ_2 e λ_4 per trovare delle condizioni sul parametro a come richiesto dalle specifiche del testo.

$$\rho\left(\begin{bmatrix} A - \lambda_1 & B \end{bmatrix}\right) = \rho\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4a & -2a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}\right) = 4;$$

$$\rho\left(\begin{bmatrix} A - \lambda_2 & B \end{bmatrix}\right) = \rho\left(\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4a & -2a-3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 4;$$

$$\rho\left(\begin{bmatrix} A - \lambda_4 & B \end{bmatrix}\right) = \rho\left(\begin{bmatrix} 2a-1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4a & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2a+1 & 1 \end{bmatrix}\right) = 4 \text{ se e solo se } a \neq -1/2.$$

Studiamo adesso l'osservabilità degli autovalori del processo:

$$\rho\begin{pmatrix} A-\lambda_1 I \\ C \end{pmatrix} = \rho\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4a & -2a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 4 \text{ se e solo se } a \neq 1;$$

$$\rho\begin{pmatrix} A-\lambda_2 I \\ C \end{pmatrix} = \rho\left(\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -4a & -2a-3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 4;$$

$$\rho\begin{pmatrix} A-\lambda_4 I \\ C \end{pmatrix} = \rho\left(\begin{bmatrix} 2a-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2a & 1 & 0 \\ 1 & -4a & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2a+1 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 4 \text{ se e solo se } a \neq 0.$$

Dunque il problema ammette soluzione se e solo se $a \neq -1/2, a \neq 0$ e $a \neq 1$.

Esercizio 4 (Homework con soluzione) *Dato il sistema lineare tempo continuo:*

$$\begin{cases} dx/dt = Ax + Bu, x \in \mathbb{R}^2, u \in \mathbb{R} \\ y = Cx, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

dove:

$$A = \begin{bmatrix} a+1 & -1 \\ a & -2a \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R},$$

studiare al variare del parametro a se è possibile stabilizzare asintoticamente il processo per mezzo di un controllore dinamico a retroazione dall'uscita e, nei casi in cui è possibile, determinare tale controllore.

Svolgimento - Calcoliamo le matrici di raggiungibilità e osservabilità per studiare la raggiungibilità e osservabilità del processo. Si ottiene:

$$R = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & a-2a^2 \end{bmatrix},$$
$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2a+1 & -2a-1 \end{bmatrix}.$$

Pertanto il sistema è raggiungibile se e solo se:

$$\det(R) = -2a^2 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0$$

ed il sistema è osservabile se e solo se:

$$\det(O) = -2 - 4a \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -1/2.$$

Caso 1.) In virtù del Teorema 2, per $a \neq 0, -1/2$, il problema ha soluzione. La sintesi del controllore è fatta per mezzo delle formule di Ackermann. Quindi, imponendo ad esempio gli autovalori del processo controllato coincidenti in -1, si ottiene:

$$p(A) = (A+I)^2 = \begin{bmatrix} a^2+3a+4 & a-3 \\ -a^2+3a & 4a^2-5a+1 \end{bmatrix},$$
$$R^{-1} = \begin{bmatrix} (2a-1)/2a & 1/2a^2 \\ 1/2a & -1/2a^2 \end{bmatrix},$$
$$O^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/(4a+2) \\ 1/2 & -1/(4a+2) \end{bmatrix};$$

$$H = -\begin{bmatrix} 1/2a & -1/2a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^2+3a+4 & a-3 \\ -a^2+3a & 4a^2-5a+1 \end{bmatrix},$$
$$= \frac{1}{2a^2} \begin{bmatrix} -a^3-4a^2-a & 3a^2-2a+1 \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} a^2+3a+4 & a-3 \\ -a^2+3a & 4a^2-5a+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/(4a+2) \\ -1/(4a+2) \end{bmatrix},$$
$$= \frac{1}{4a+2} \begin{bmatrix} a^2+2a+7 \\ -5a^2+8a-1 \end{bmatrix}.$$

Caso 2.) Studiamo il caso critico per $a = 0$. Le matrici dinamiche del processo per questo caso critico sono:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R};$$

e pertanto essendo il sistema in forma canonica di raggiungibilità, l'autovalore non raggiungibile è 0: il sistema non è stabilizzabile con retroazione statica dallo stato ed il problema non ha soluzione. Caso 3.) Studiamo il caso critico per $a = -1/2$. Le matrici dinamiche del processo per questo caso critico sono

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & -1 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R}.$$

Gli autovalori del processo in questo caso sono:

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 3/2,$$

ed uno di essi non è osservabile: dunque il sistema non è rilevabile ed il problema non ha soluzione.