Corso di Controlli Automatici
Proff. M. D. Di Benedetto e S. Di Gennaro

Esercitazione del 24/5/2011 - Parte 1

Ing. Alessandro Borri, Prof. Giordano Pola
{alessandro.borri,giordano.pola}@univaq.it

1 Rilevabilità dei sistemi lineari

La rilevabilità dei sistemi lineari è una proprietà strutturale più debole dell'osservabilità, in quanto richiede che gli autovalori non osservabili siano asintoticamente stabili.
Più formalmente dato un sistema lineare tempo continuo:

$$\begin{cases} dx/dt = Ax + Bu, x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m \\ y = Cx, y \in \mathbb{R}^p \end{cases} \tag{1}$$

è possibile definire una opportuna trasformazione di coordinate $\tilde{x} = Tx$ dello spazio di stato $\mathbb{R}^n$, che porti il sistema (1) nella seguente forma canonica di osservabilità:

$$\begin{cases} d\tilde{x}/dt = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u \\ y = \tilde{C}\tilde{x}, \end{cases} \tag{2}$$

dove:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \tilde{C} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix},$$

e $A_{11} \in \mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{(n-r)\times m}$, $C_1 \in \mathbb{R}^{p\times(n-r)}$. Dalla teoria dei sistemi, è noto che il sottosistema:

$$\begin{cases} dx_1/dt = A_{11}x_1 + B_1u, \\ y = C_1x_1, \end{cases} \tag{3}$$

è osservabile; da cui è immediato il seguente risultato:

Teorema 1: *Il sistema (1) è rilevabile se e solo se la matrice A_{22} è asintoticamente stabile.*

Per verificare le ipotesi del teorema precedente si può utilizzare per esempio il PBH test. La proprietà di rilevabilità permette la costruzione di un osservatore asintotico anche qualora il sistema in considerazione non sia osservabile. Per fare ciò utilizziamo la formula di Ackermann. Sia $p(\lambda)$ un polinomio di grado $n - r$ le cui radici sono a parte reale negativa. Ponendo:

$$G_1 = p(A_{11}) \cdot \mu_1,$$

dove μ_1 è l'ultima colonna della matrice di osservabilità associata al sistema (3), l'osservatore:

$$\begin{cases} d\xi_1/dt = A_{11}\xi_1 + B_1u + G_1(y - C_1\xi_1), \\ \eta_1 = \xi_1, \end{cases}$$

è tale che lo stato ξ_1 converge asintoticamente allo stato x_1 con velocità data dalle radici del polinomio $p(\lambda)$. Se le ipotesi del Teorema 1 sono verificate, è chiaro che per qualunque matrice $G_2 \in \mathbb{R}^{r \times p}$, l'osservatore:

$$\begin{cases} d\tilde{\xi}/dt = \tilde{A}\tilde{\xi} + \tilde{B}u + \tilde{G}(y - \tilde{C}\tilde{\xi}), \\ \tilde{\eta} = \tilde{\xi}, \end{cases}$$

dove:

$$\tilde{G} = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix},$$

e tale che lo stato ξ converge asintoticamente allo stato $\tilde{x}$ del systema (3). Infine tenendo conto del cambiamento di coordinate, un osservatore il cui stato ξ converge asintoticamente allo stato x del sistema (1) è dato da:

$$\begin{cases} d\xi/dt = A\xi + Bu + G(y - C\xi), \\ \eta = \xi, \end{cases}$$

dove: $G = T^{-1}\tilde{G}$.

Esercizio 1 *Dato il sistema lineare tempo continuo:*

$$\left\{\begin{array}{l} dx/dt = Ax + Bu, x \in \mathbb{R}^2, u \in \mathbb{R} \\ y = Cx, y \in \mathbb{R} \end{array}\right. \tag{4}$$

dove:

$$A = \begin{bmatrix} a+1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & a \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R},$$

(i) *Studiare al variare del parametro a la rilevabilità del sistema (4);*

(ii) *Progettare se esiste un osservatore asintotico per il sistema (4).*

Svolgimento - Conviene innanzitutto studiare l'osservabilità del sistema (4). La matrice di osservabilità è:

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 2a+1 & -(2a+1) \end{bmatrix},$$

e pertanto il sistema (4) è osservabile se e solo se:

$$\det(O) = -(a+1)(2a+1) \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -1, a \neq -1/2.$$

Studiamo i vari casi critici.
Caso 1) $a \neq -1, a \neq -1/2$
In questo caso la matrice di osservabilità è invertibile e:

$$O^{-1} = \frac{1}{2a^2+3a+1} \begin{bmatrix} 2a+1 & a \\ 2a+1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Assegnamo ad esempio gli autovalori dell'osservatore in $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Applicando la formula di Ackermann, si ottiene:

$$\begin{aligned} G &= p(A)\mu \\ &= \frac{1}{2a^2+3a+1} \begin{bmatrix} a^2+4a+3 & -(a+1) \\ a+1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ -1 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{2a^2+3a+1} \begin{bmatrix} a^3+4a^2+4a+1 \\ a^2+a \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{2a+1} \begin{bmatrix} a^2+3a+1 \\ a \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

da cui, un osservatore asintotico per il sistema (4) è dato da:

$$\left\{\begin{array}{l} d\xi/dt = A\xi + Bu + G(y - C\xi), \\ \eta = \xi. \end{array}\right.$$

Caso 2) $a = -1$.
In questo caso evidentemente il sistema (4) è non osservabile. Calcoliamo la forma canonica di osservabilità. La matrice O calcolata in $a = -1$ diviene:

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

da cui:

$$\mathcal{I} = \mathcal{N}(O) = span\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}.$$

Scegliendo una matrice di trasformazione:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

è possibile portare il sistema (10) nella seguente forma canonica di osservabilità:

$$\begin{cases} d\tilde{x}/dt = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u \\ y = \tilde{C}\tilde{x}, \end{cases} \tag{5}$$

dove:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \tilde{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pertanto l'autovalore relativo alla dinamica non osservabile è $\lambda_2 = -1$, ed il sistema (10) è rilevabile. Costruiamo un osservatore asintotico per il sistema (5). Siccome entrambi gli autovalori di $\tilde{A}$ coincidono con -1 è possibile scegliere un osservatore per il sistema (5) con $\tilde{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, cui corrisponde un osservatore per il sistema (10) con $G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Caso 3) $a = -1/2$.

Anche in questo caso il sistema (4) è non osservabile. Calcoliamo la forma canonica di osservabilità. La matrice O calcolata in $a = -1/2$ diviene:

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

da cui:

$$\mathcal{I} = \mathcal{N}(O) = span \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Dunque scegliendo una matrice di trasformazione:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

è possibile portare il sistema (10) nella seguente forma canonica di osservabilità:

$$\begin{cases} d\tilde{x}/dt = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u \\ y = \tilde{C}\tilde{x}, \end{cases} \tag{6}$$

dove:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/2 & -3/2 \end{bmatrix}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} 5/4 \\ -1/4 \end{bmatrix}, \tilde{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pertanto l'autovalore relativo alla dinamica non osservabile è $\lambda_2 = -3/2$, ed il sistema (10) è rilevabile. Imponendo una velocità pari a quella di e^{-t} all'osservatore relativo alla dinamica osservabile, si ottiene:

$$0 - g_1 = -1 \Leftrightarrow g_1 = 1.$$

Dunque un osservatore per il sistema (6) sarà caratterizzato dalla seguente matrice:

$$\tilde{G} = \begin{bmatrix} 1 \\ g_2 \end{bmatrix}, g_2 \in \mathbb{R},$$

da cui tenendo conto del cambio di coordinate:

$$G = T^{-1}\tilde{G} = \begin{bmatrix} 1 + g_2 \\ 2g_2 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 2 *Dato il sistema lineare tempo continuo:*

$$\left\{ \begin{array}{l} dx/dt = Ax + Bu, x \in \mathbb{R}^2, u \in \mathbb{R}, \\ y = Cx, y \in \mathbb{R}, \end{array} \right. \tag{7}$$

dove:

$$A = \begin{bmatrix} a+3 & -2 \\ 1 & a \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1+2a \\ 1+2a \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} a+3 & -2a-6 \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R},$$

si chiede di:

(i) *studiare al variare del parametro a, la rilevabilità del sistema (7);*

(ii) *progettare se esiste un osservatore asintotico per il sistema (7).*

Svolgimento - Studiamo l'osservabilità del sistema (7). La matrice di osservabilità è data da:

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = (a+3) \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ a+1 & -2(a+1) \end{bmatrix},$$

da cui si evince che il sistema (7) è inosservabile per ogni valore del parametro a. Per $a \neq -3$, il sottospazio di inosservabilità per il sistema (7) è:

$$\mathcal{I} = \mathcal{N}(O) = span \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\},$$

da cui, scegliendo una matrice di trasformazione:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

è possibile portare il sistema (7) nella seguente forma canonica di osservabilità:

$$\left\{ \begin{array}{l} d\tilde{x}/dt = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u \\ y = \tilde{C}\tilde{x}, \end{array} \right. \tag{8}$$

dove:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} a+1 & 0 \\ 1 & a+2 \end{bmatrix}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} -1-2a \\ 1+2a \end{bmatrix}, \tilde{C} = \begin{bmatrix} a+3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dall'analisi del sistema (8) è possibile studiare le condizioni di rilevabilità. L'autovalore non osservabile è $\lambda_2 = a + 2$ e pertanto:

$$\lambda_2 < 0 \Leftrightarrow a < -2.$$

Inoltre per $a = -3$, l'altro autovalore di $\tilde{A}$ perde di osservabilità ed è pari a -2, pertanto verifica le specifiche. Dunque il sistema è rilevabile se e solo $a < -2$. Costruiamo adesso un osservatore. Considerando soltanto la dinamica osservabile del sistema (8), si ottiene:

$$a + 1 - g_1(a + 3) = -1,$$

da cui:

$$g_1 = \frac{a+2}{a+3}.$$

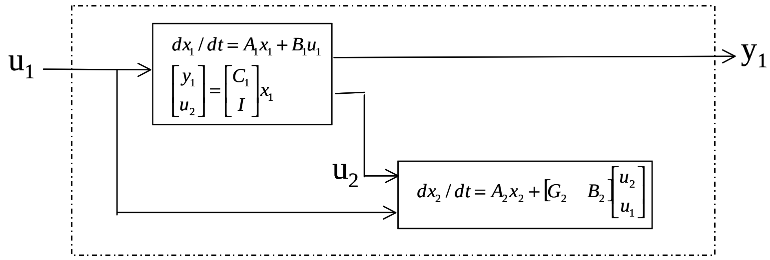
Dunque un osservatore per il sistema (8) è dato da:

$$\tilde{G} = \begin{bmatrix} \frac{a+2}{a+3} \\ g_2 \end{bmatrix}, g_2 \in \mathbb{R};$$

da cui tenendo conto del cambiamento di coordinate:

$$G = T^{-1}\tilde{G} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{a+2}{a+3} \\ g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a+2}{a+3} + 2g_2 \\ g_2 \end{bmatrix}, g_2 \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 3 *Dato il seguente schema di controllo:*



dove:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -3/2 & 1/2 \\ 1/2 & -3/2 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad G_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

(i) *studiare la rilevabilità del sistema;*

(ii) *costruire un osservatore asintotico per tale sistema.*

Svolgimento - L'interconnessione del processo in figura ha come rappresentazione con lo spazio di stato:

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} dx_1/dt \\ dx_2/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ G_2 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u \\ y_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \end{array} \right. \tag{9}$$

Il sistema (9) è in forma canonica di osservabilità e pertanto le dinamiche relative allo stato x_2 sono inosservabili. Affinche si abbia rilevabilità, gli autovalori relativi alla matrice A_2 devono essere a parte reale negativa. Gli autovalori di A_2 sono:

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -1 \ .$$

Dunque la matrice A_{22} è stabile asintoticamente. Verifichiamo che la coppia (A_1, C_1) sia osservabile. Si ha:

$$O_1 = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_1 A_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dunque il sistema (9) è rilevabile. Calcoliamo adesso un osservatore asintotico per il sistema (9). Consideriamo il sottosistema osservabile:

$$\left\{ \begin{array}{l} dx_1/dt = A_1 x_1 + B_1 u, \\ y_1 = C_1 x_1, \end{array} \right.$$

e calcoliamo un osservatore asintotico per tale sistema. Ponendo ad esempio $p(\lambda) = (\lambda + 1)^2$, si ottiene:

$$O_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$p(A_1) = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix},$$

ed infine:

$$G_1 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Pertanto un osservatore asintotico per il sistema (9) è caratterizzato da matrice dinamica:

$$G = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ g_3 \\ g_4 \end{bmatrix}, g_3, g_4 \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 4 (Homework con soluzione) *Dato il sistema lineare tempo continuo:*

$$\begin{cases} dx/dt = Ax + Bu, x \in \mathbb{R}^3, u \in \mathbb{R} \\ y = Cx, y \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{10}$$

dove:

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

(i) *Studiare se il sistema (10) è rilevabile;*

(ii) *Progettare se esiste un osservatore asintotico dello stato del sistema (10).*

Svolgimento - *Conviene innanzitutto scrivere il sistema (10) in forma canonica di osservabilità. La matrice di osservabilità associata al sistema (10) è:*

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -6 \end{bmatrix}.$$

e dunque il sottospazio di inosservabilità è dato da:

$$\mathcal{I} = \mathcal{N}(O) = span \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Scegliendo ad esempio una matrice di trasformazione:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

è possibile portare il sistema (10) nella seguente forma canonica di osservabilità:

$$\begin{cases} d\tilde{x}/dt = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u \\ y = \tilde{C}\tilde{x}, \end{cases} \tag{11}$$

dove:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \tilde{C} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pertanto l'autovalore relativo alla dinamica non osservabile è $\lambda_3 = -4$, e dunque il sistema (*10*) è rilevabile. Costriamo un osservatore asintotico per il sistema (*10*).
La dinamica osservabile è data da:

$$\begin{cases} dx_1/dt = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} u, \\ y_1 = \begin{bmatrix} -2 & -1 \end{bmatrix} x_1, \end{cases} \tag{12}$$

e pertanto la matrice di osservabilità relativa al sistema (12) è:

$$O_1 = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_1 A_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

da cui:

$$O_1^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1/2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Scegliendo ad esempio una velocità di convergenza per l'osservare relativo al sistema osservabile coincidente con quella di e^{-t}, ed applicando la formula di Ackermann, si ottiene:

$$\begin{aligned} G_1 &= p(A_{11})\mu \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Dunque un osservatore asintotico per il sistema (12) è dato da:

$$\begin{cases} d\xi_1/dt = A_{11}\xi_1 + B_1 u + G_1(y - C_1\xi_1), \\ \eta_1 = \xi_1, \end{cases}$$

da cui, ponendo:

$$G = T^{-1} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, g \in \mathbb{R},$$

un osservatore il cui stato ξ converge asintoticamente allo stato x del sistema (*10*) è dato da:

$$\begin{cases} d\xi/dt = A\xi + Bu + G(y - C\xi), \\ \eta = \xi. \end{cases}$$