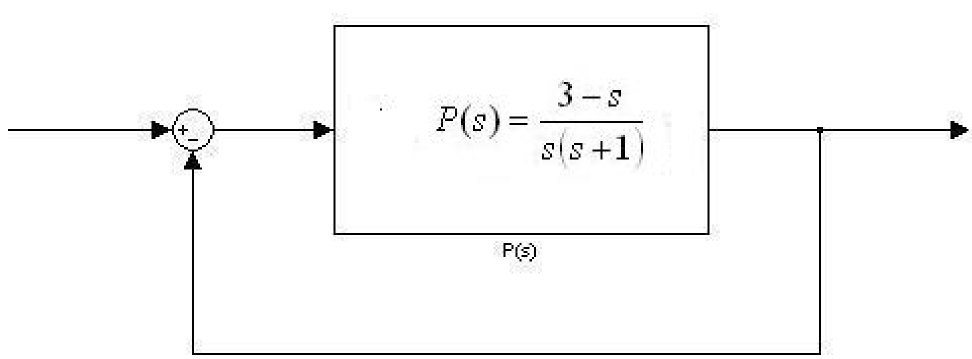
# Corso di Controlli Automatici
# Proff. M. D. Di Benedetto e S. Di Gennaro

Esercitazione del 21/5/2009

Ing. Alessandro Borri
alessandro.borri@univaq.it

## Soluzione homework 1 (14/5/2009)

Stabilizzare asintoticamente il seguente sistema a ciclo chiuso, mediante l'utilizzo del luogo delle radici.



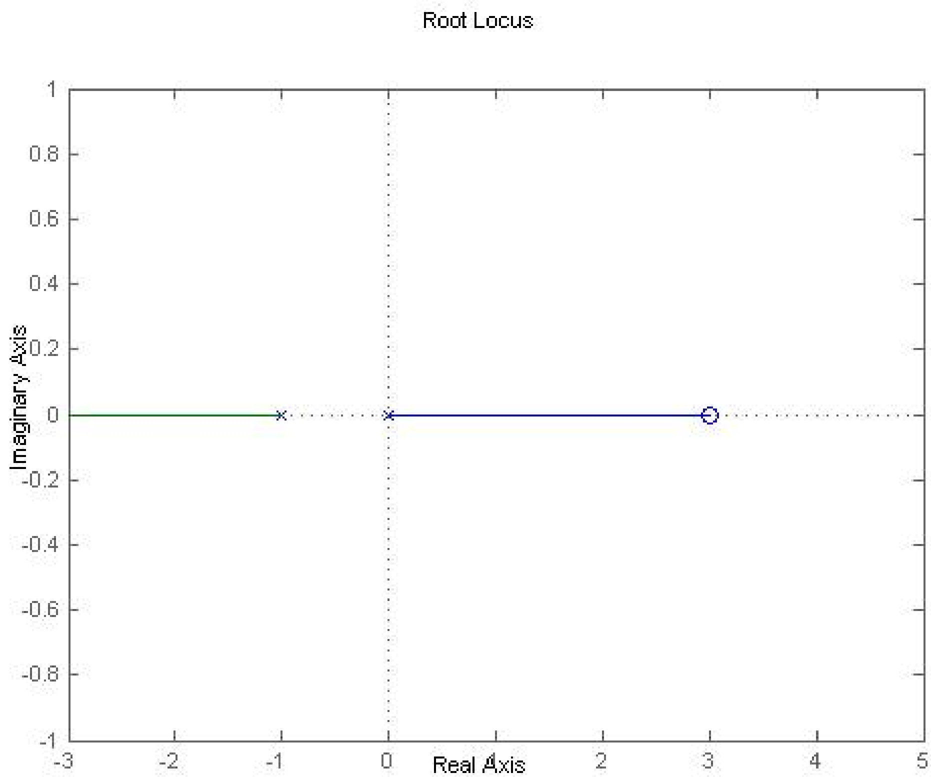

La funzione di trasferimento del sistema (semplicemente stabile) sul ramo diretto è

$$P(s) = \frac{N_P(s)}{D_P(s)} = \frac{3-s}{s\ (s+1)}$$

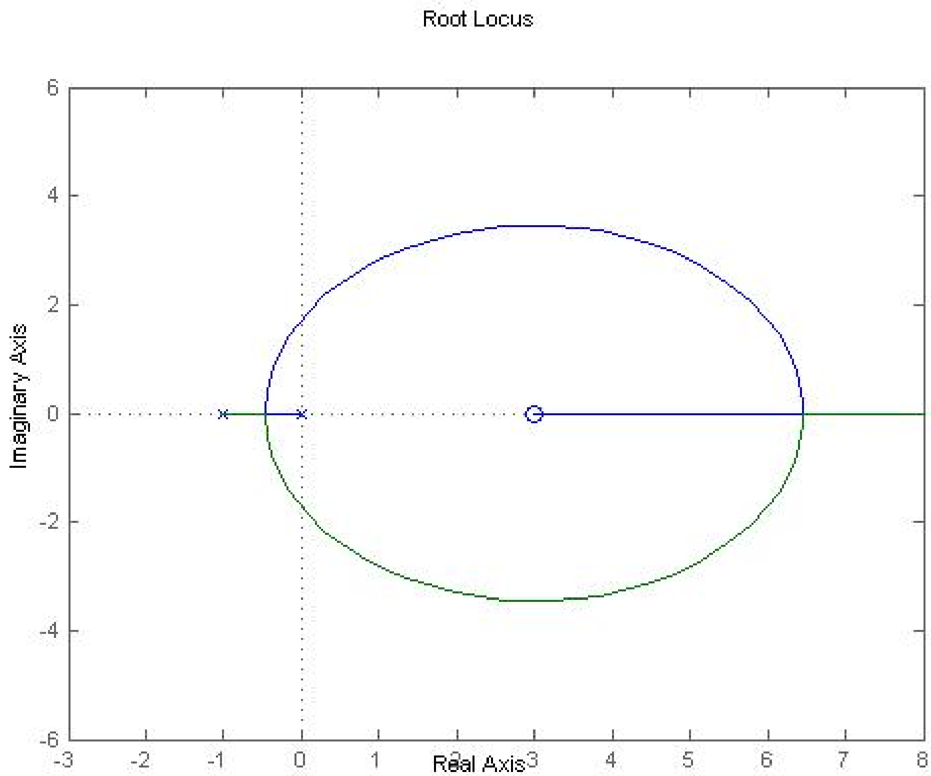
Osservazioni preliminari

$$\begin{aligned} n &= 2,\, m = 1 \Rightarrow n - m = 1 \\ z_1 &= 3 \Longrightarrow \text{il sistema non è a fase minima} \\ p_1 &= 0,\, p_2 = -1 \end{aligned}$$

Il luogo delle radici, ottenuto aggiungendo un guadagno $G(s) = -K'$ sul ramo diretto, è




Luogo positivo




Luogo negativo

La funzione di trasferimento del sistema ad anello chiuso (retroazione unitaria) è

$$W(s) = \frac{N_W(s)}{D_W(s)} = \frac{N_{F'}(s)}{N_{F'}(s) + D_{F'}(s)} = \frac{K'\,(s-3)}{K'\,(s-3) + s\,\,(s+1)}$$

con $F'(s) = G(s)P(s)$.

Il luogo delle radici è descritto dall'equazione

$$D_W(s) = K'\,(s-3) + s\,\,(s+1) = s^2 + (K'+1)\,s - 3K'$$

al variare di $K' \in \mathbb{R}$.

Condizione necessaria e sufficiente per l'asintotica stabilità a ciclo chiuso è (regola di Cartesio)

$$-1 < K' < 0.$$

Ad esempio, si può porre $K' = -0.5$.

**Punti singolari**

$$\begin{cases} s^2 + (K'+1)\,s - 3K' = 0 \\ 2s + K' + 1 = 0 \end{cases}$$

I punti singolari sono

$$\begin{aligned} s_1 &= 3 - 2\sqrt{3} = -0.46 \qquad \text{con } K'_1 = 4\sqrt{3} - 7 = -0.072 \\ s_2 &= 3 + 2\sqrt{3} = 6.46 \qquad \text{con } K'_2 = -4\sqrt{3} - 7 = -13.928 \end{aligned}$$

Annullando il termine di ordine 1 del polinomio $D_W(s)$ (basta porre $K' = -1$), si ottengono gli attraversamenti dell'asse immaginario, risolvendo l'equazione

$$s^2 + 3 = 0$$

Gli attraversamenti si hanno per

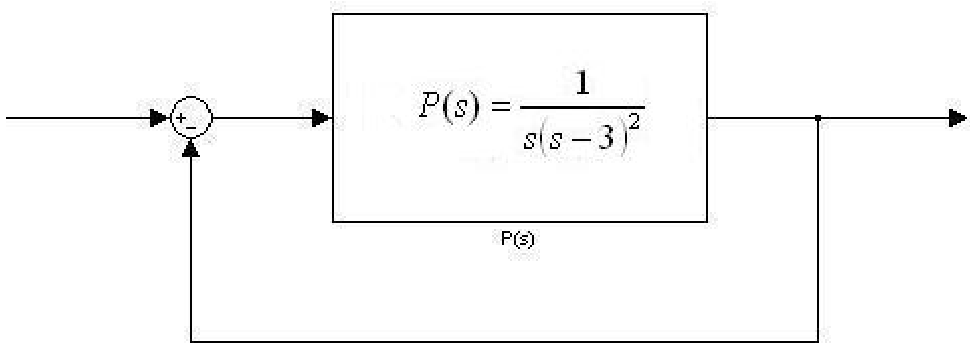
$$s = \pm j\sqrt{3} \quad \text{per } K' = -1$$

Si è risolto quindi il problema con un semplice controllore statico

$$G(s) = -K' = 0.5$$

## Soluzione homework 2 (14/5/2009)

Stabilizzare asintoticamente il seguente sistema a ciclo chiuso, mediante l'utilizzo del luogo delle radici




La funzione di trasferimento del sistema (instabile) sul ramo diretto è

$$P(s) = \frac{N_P(s)}{D_P(s)} = \frac{1}{s\ (s-3)^2}$$

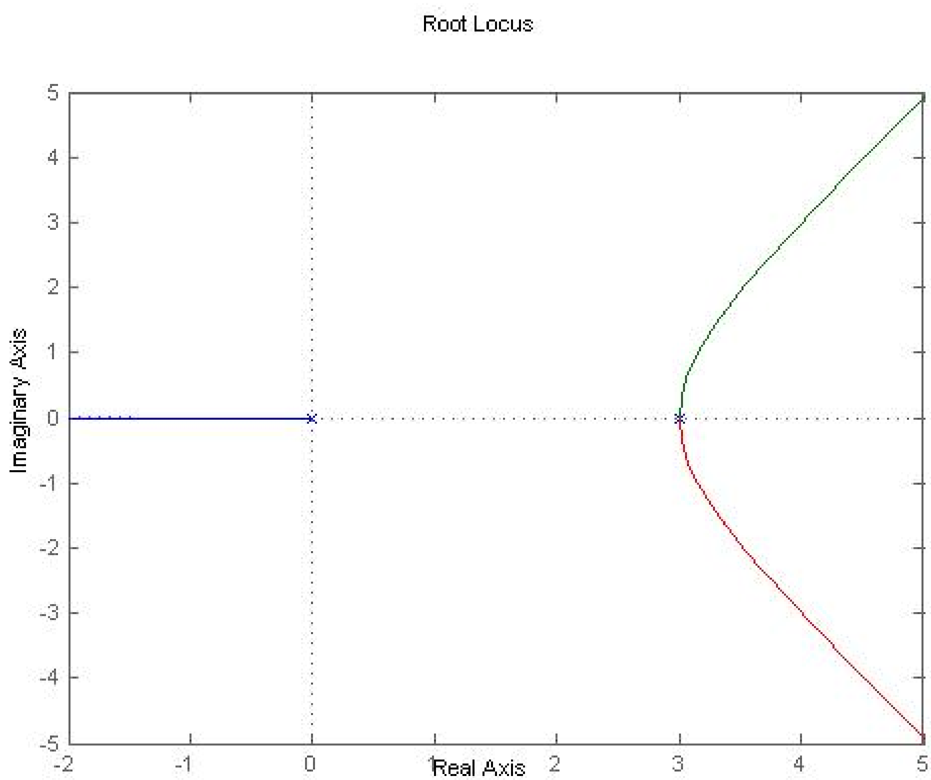
Osservazioni preliminari

$$\begin{aligned} n &= 3,\ m = 0 \Rightarrow n - m = 3 \\ \text{Non ci sono zeri} &\Longrightarrow \text{sistema a fase minima} \\ p_1 &= 0,\ p_2 = 3,\ p_3 = 3 \end{aligned}$$

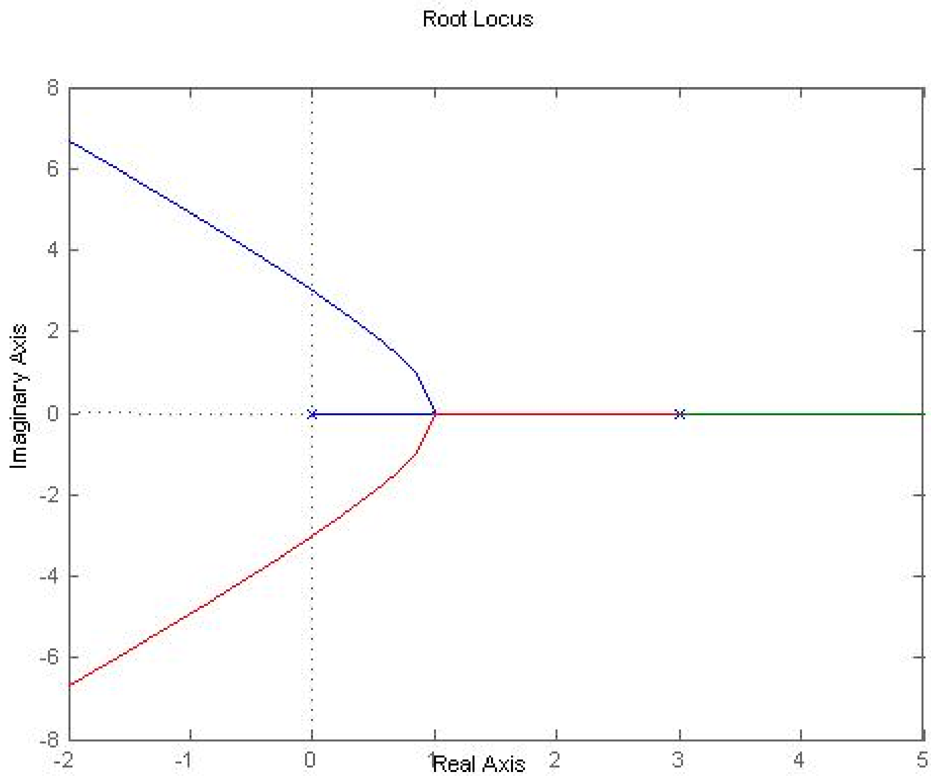
Il centro degli asintoti è

$$s_o = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i}{(n-m)} = \frac{0+3+3}{3} = 2$$

Il luogo delle radici, ottenuto aggiungendo un guadagno $G(s) = K'$ sul ramo diretto, è




Luogo positivo




Luogo negativo

**Stabilizzazione** E' necessario "raddrizzare" gli asintoti aggiungendo uno zero e va spostato il centro degli asintoti a sinistra dell'origine; bisogna inoltre evitare di creare rami nel semipiano destro del piano complesso (non vanno introdotti zeri positivi).

Introducendo uno zero negativo, non è possibile spostare a sinistra il centro degli asintoti. Va aggiunta quindi anche una coppia polo-zero

$$G(s) = K' \frac{(s + z_1)(s + z_2)}{(s + p)}.$$

Si può imporre il nuovo centro degli asintoti in $-1$

$$s_0' = \frac{0 + 3 + 3 - p + z_1 + z_2}{2} = -1 \Longrightarrow p - z_1 - z_2 = 8$$

Ad esempio, si può scegliere $p = 10$, $z_1 = z_2 = 1$.

La funzione di trasferimento del sistema ad anello chiuso (retroazione unitaria) è

$$W(s) = \frac{N_W(s)}{D_W(s)} = \frac{N_{F'}(s)}{N_{F'}(s) + D_{F'}(s)} = \frac{K'\left(s+1\right)^2}{K'\left(s+1\right)^2 + s\ (s-3)^2\,(s+10)}$$

con $F'(s) = G(s)P(s)$.

Il luogo delle radici è descritto dall'equazione

$$\begin{aligned} D_W(s) &= K'\left(s+1\right)^2 + s\ (s-3)^2\,(s+10) = \\ &= s^4 + 4s^3 + \left(K' - 51\right)s^2 + \left(2K' + 90\right)s + K' \end{aligned}$$

al variare di $K' \in \mathbb{R}$.

Condizione necessaria per l'asintotica stabilità a ciclo chiuso è

$$K' > 51.$$

Per avere una condizione necessaria e sufficiente, si applica il criterio di Routh:

$$\begin{array}{|c|lll} 4 & 1 & K' - 51 & K' \\ 3 & 2 & K' + 45 & \\ 2 & K' - 147 & 2K' & \\ 1 & \frac{(K')^2 - 106K' - 6615}{K' - 147} & 0 & \\ 0 & 2K' & & \end{array}$$

Si ha stabilità asintotica a ciclo chiuso se e solo se

$$\begin{cases} K' > 147 \\ (K')^2 - 106K' - 6615 > 0 \end{cases} \Longrightarrow K' > 150.08$$

**Osservazione** Il controllore otttenuto finora

$$G(s) = K'\frac{\left(s+1\right)^2}{(s+10)} \qquad \text{con} \quad K' > 150.08$$

è irrealizzabile, perchè improprio. Si sfrutta allora il teorema seguente

**Teorema** *Sia dato un sistema a retroazione unitaria con funzione di trasferimento* $F'(s) = G(s)P(s)$ *sul ramo diretto. Se il sistema ad anello* *chiuso è asintoticamente stabile e se si aggiunge a $G(s)$ un termine ("polo lontano") della forma*

$$\frac{1}{1+\tau s}=\frac{\frac{1}{\tau}}{\left(s+\frac{1}{\tau}\right)}$$

*allora esiste un $\bar{\tau}>0$ sufficientemente piccolo tale che, se $0<\tau<\bar{\tau}$, il sistema complessivo rimane asintoticamente stabile.*

Per la determinazione di $\bar{\tau}$ (che dipende da $K'$), fisso $K'=200>150.08$ ed applico il criterio di Routh.

Si ha

$$F'(s)=G(s)P(s)=200\frac{(s+1)^2}{(s+10)(1+\tau s)}\frac{1}{s\,(s-3)^2}=200\frac{(s+1)^2}{s\,(s-3)^2\,(s+10)(1+\tau s)}$$

La funzione di trasferimento del sistema ad anello chiuso è

$$W(s)=\frac{N_W(s)}{D_W(s)}=\frac{N_{F'}(s)}{N_{F'}(s)+D_{F'}(s)}=\frac{200\,(s+1)^2}{200\,(s+1)^2+s\,(s-3)^2\,(s+10)(1+\tau s)}$$

I poli della funzione di trasferimento a ciclo chiuso sono le soluzioni dall'equazione

$$\begin{aligned}D_W(s)&=200\,(s+1)^2+s\,(s-3)^2\,(s+10)\,(1+\tau s)=\\&=\tau s^5+(4\tau+1)\,s^4+(4-51\tau)\,s^3+(90\tau+149)\,s^2+490s+200\end{aligned}$$

al variare di $\tau\in\mathbb{R}$.

Condizione necessaria per l'asintotica stabilità a ciclo chiuso è

$$0<\tau<\frac{4}{51}.$$

Per avere una condizione necessaria e sufficiente, si applica il criterio di Routh:

$$\begin{array}{c|lll}
5 & \tau & 4-51\tau & 490\\
4 & 4\tau+1 & 90\tau+149 & 200\\
3 & -294\tau^2-184\tau+4 & 1760\tau+490 & 0\\
2 & -26\,460\tau^3-67\,406\tau^2-30\,776\tau+106 & 200 & 0\\
1 & -46\,569\,600\tau^4-131\,599\,960\tau^3-87\,135\,900\tau^2-14\,856\,880\tau+51\,140 & 0 & \\
0 & 200 & &
\end{array}$$

Si ha stabilità asintotica a ciclo chiuso se e solo se

$$\begin{cases} \tau > 0 \\ -294\tau^2 - 184\tau + 4 > 0 \\ -26\,460\tau^3 - 67\,406\tau^2 - 30\,776\tau + 106 > 0 \\ -46\,569\,600\tau^4 - 131\,599\,960\tau^3 - 87\,135\,900\tau^2 - 14\,856\,880\tau + 51\,140 > 0 \end{cases}$$

**Suggerimento** La soluzione del sistema di disequazioni derivante dalla tabella di Routh non è immediata. Allora si può procedere "per tentativi", scegliendo $\tau$ sempre più piccolo, e verificare se gli elementi della prima colonna della tabella di Routh sono tutti dello stesso segno. Una possibilità è scegliere, al passo $k$ del procedimento, $\tau = 10^{-k}$ . Il teorema enunciato in precedenza assicura che il procedimento ha sempre successo dopo un numero finito di passi.

Si può verificare che si ha stabilità asintotica ad anello chiuso con $\tau = 2 * 10^{-3} = 0.002 = \frac{1}{500} \Longrightarrow \frac{1}{\tau} = 500$.

Si è giunti così alla forma definitiva del controllore stabilizzante

$$G(s) = 10^5 \frac{(s+1)^2}{(s+10)\,(s+500)}$$

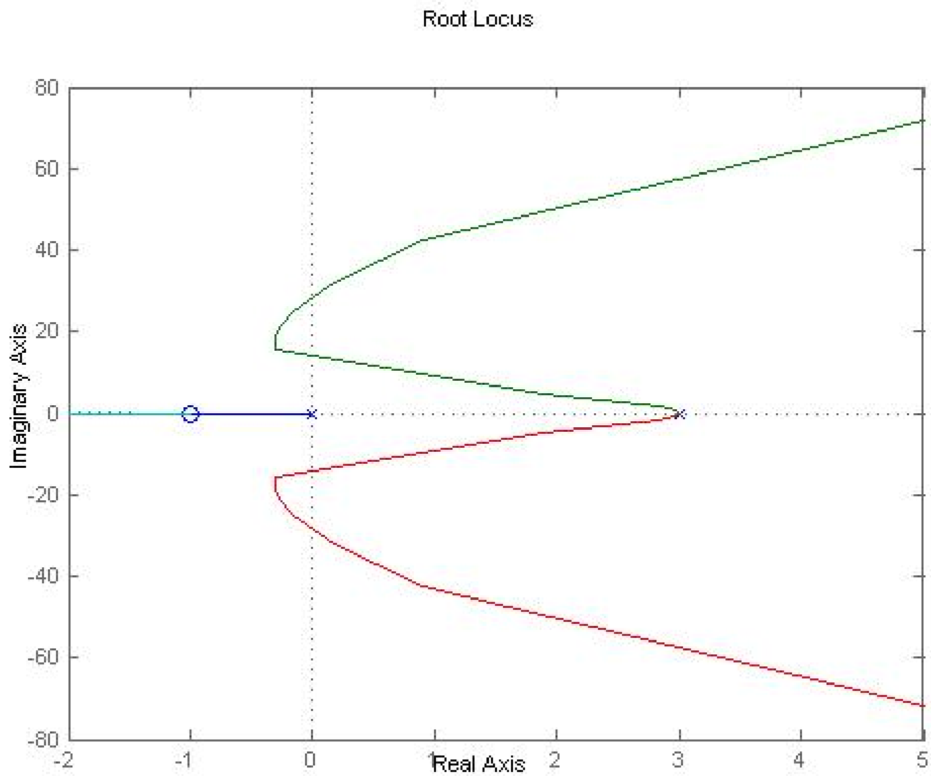
Il processo sul ramo diretto ha funzione di trasferimento pari a

$$F'(s) = G(s)P(s) = 10^5 \frac{(s+1)^2}{s\,(s+10)\,(s+500)\ \ (s-3)^2}$$

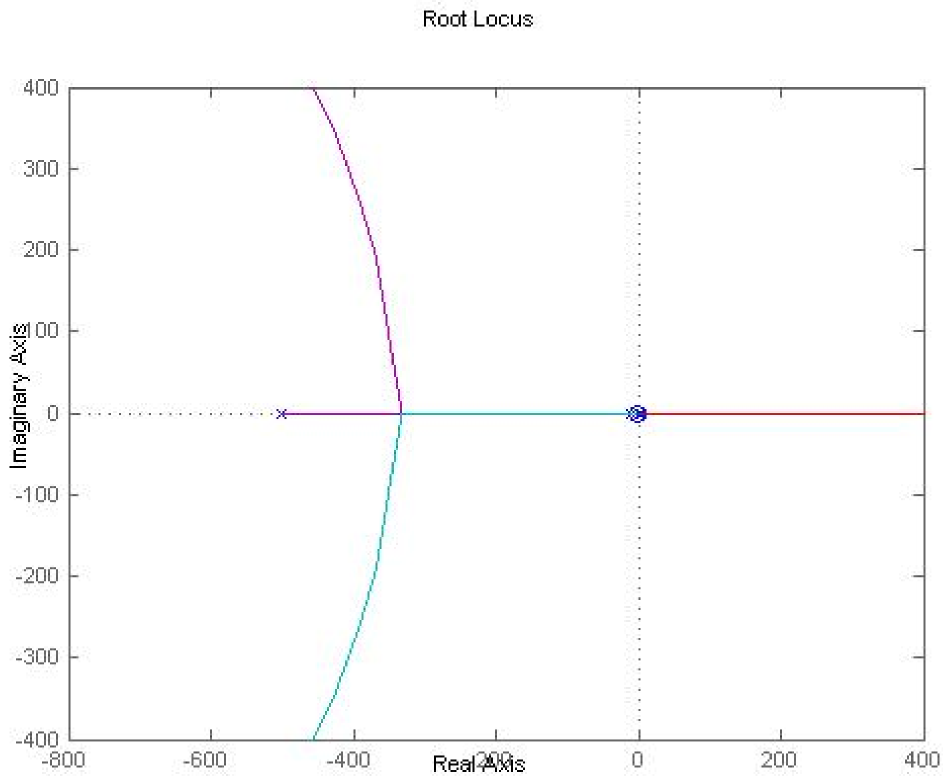
Il nuovo centro degli asintoti è

$$s_0' = \frac{0 - 10 - 500 + 3 + 3 + 1 + 1}{3} = -\frac{502}{3} \simeq -167.33$$

Il nuovo luogo delle radici, aggiungendo un ulteriore fattore $\frac{K'}{10^5}$ sul ramo diretto, si presenterebbe così



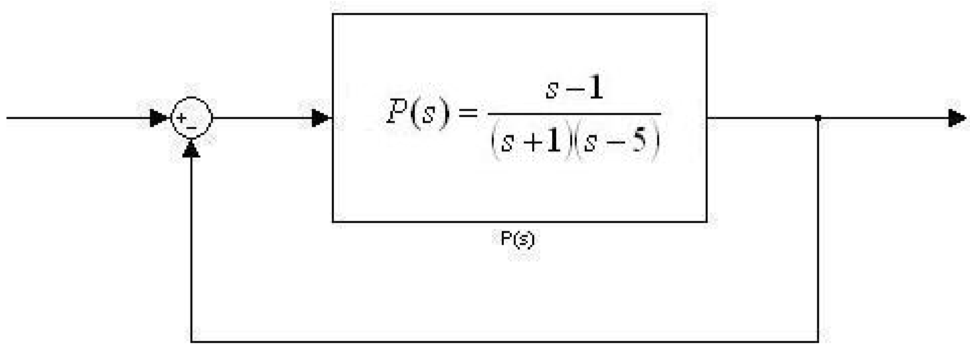

Luogo positivo dopo la compensazione




Luogo negativo dopo la compensazione

## Sintesi mediante luogo delle radici - Esercizio 1

Stabilizzare asintoticamente il seguente sistema a ciclo chiuso, mediante l'utilizzo del luogo delle radici



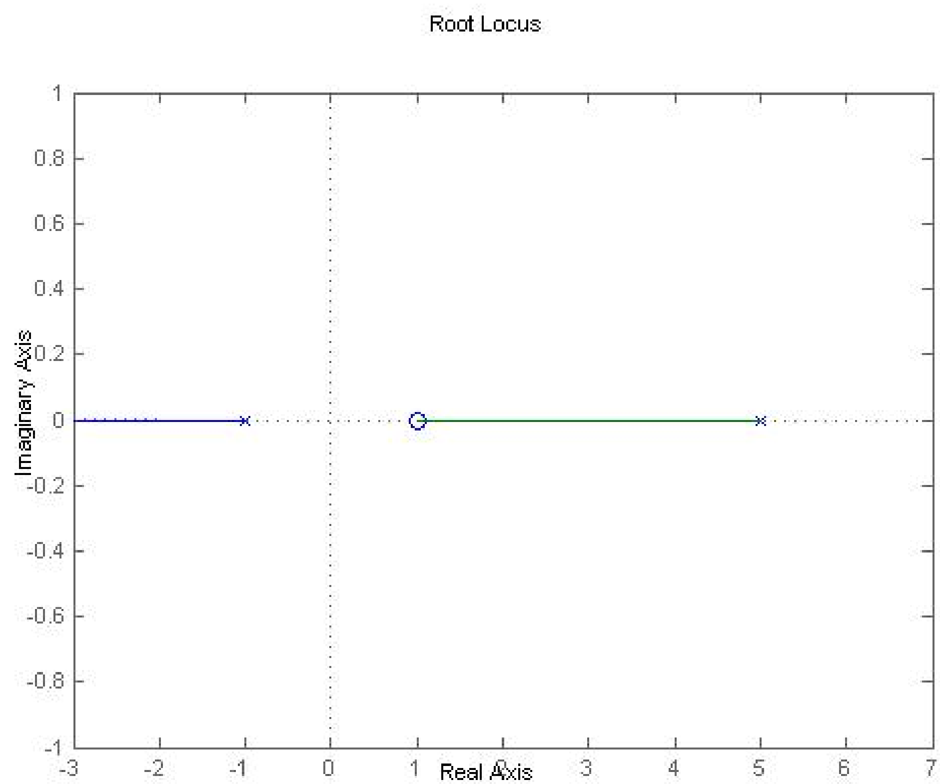

La funzione di trasferimento del sistema (instabile) sul ramo diretto è

$$P(s) = \frac{N_P(s)}{D_P(s)} = \frac{s-1}{(s+1)(s-5)}$$

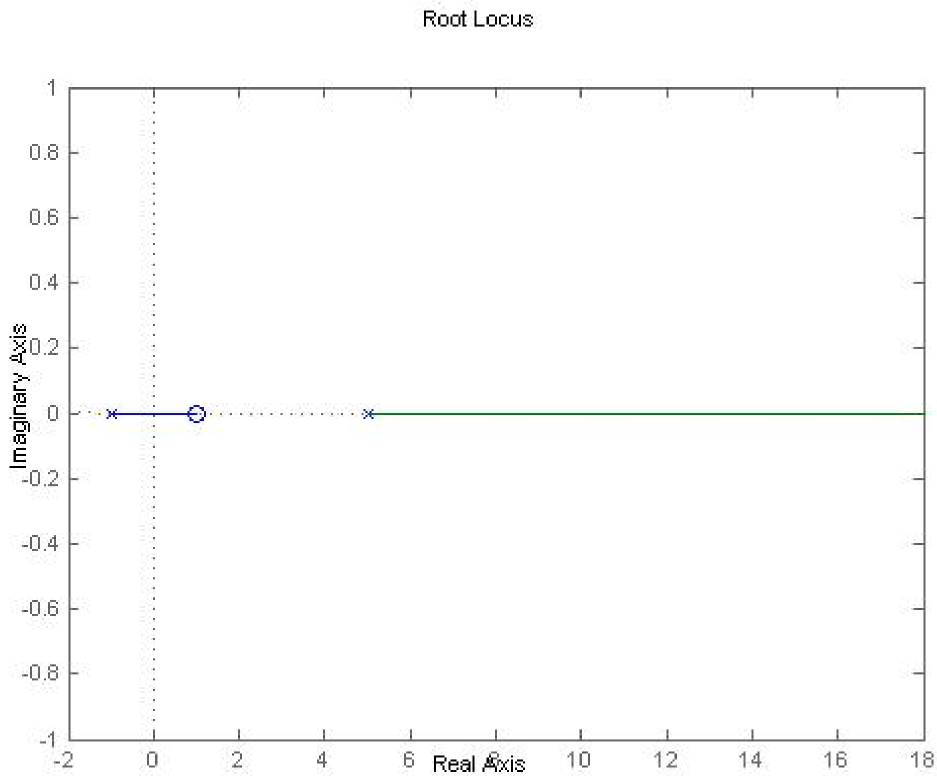
Osservazioni preliminari

$$\begin{aligned} n &= 2,\, m = 1 \Rightarrow n - m = 1 \\ z_1 &= 1 \Longrightarrow \text{il sistema non è a fase minima} \\ p_1 &= -1,\, p_2 = 5 \end{aligned}$$

Il luogo delle radici, ottenuto aggiungendo un guadagno $G(s) = K'$ sul ramo diretto, è




Luogo positivo




Luogo negativo

La funzione di trasferimento del sistema ad anello chiuso (retroazione unitaria) è

$$W(s) = \frac{N_W(s)}{D_W(s)} = \frac{N_{F'}(s)}{N_{F'}(s) + D_{F'}(s)} = \frac{K'(s-1)}{K'(s-1)+(s+1)(s-5)}$$

con $F'(s) = G(s)P(s)$.

Il luogo delle radici è descritto dall'equazione

$$D_W(s) = K'(s-1) + (s+1)(s-5) = s^2 + (K'-4)s - K' - 5$$

al variare di $K' \in \mathbb{R}$.

Condizione necessaria e sufficiente per l'asintotica stabilità a ciclo chiuso è (regola di Cartesio)

$$K' - 4 > 0 \text{ e } K' + 5 < 0 \Longrightarrow \text{il sistema è instabile } \forall K'$$

Bisognerà ricorrere ad un controllore più complicato per stabilizzare il sistema, ma non è immediato capire come procedere, in quanto siamo in un caso di sistema a fase non minima.

**Stabilizzazione** In casi come questo, in cui la funzione di trasferimento sul ramo diretto ha solo uno zero ed un polo con parte reale positiva, con il polo posto a destra dello zero, si può porre un altro polo positivo a destra di quello già esistente. In questo modo, "si creerà" un punto singolare tra questi due poli, ed il luogo può assumere una configurazione tale da stabilizzare il sistema a ciclo chiuso per $K'$ interno ad un opportuno intervallo.

Ad esempio poniamo

$$G(s) = K' \frac{s+1}{s-6}$$

in cui si è aggiunto anche uno zero negativo che cancella il polo stabile del sistema originale.

La funzione di trasferimento sul ramo diretto diventa

$$F'(s) = G(s)P(s) = K' \frac{s+1}{s-6} \frac{s-1}{(s+1)(s-5)} = K' \frac{s-1}{(s-5)(s-6)}$$

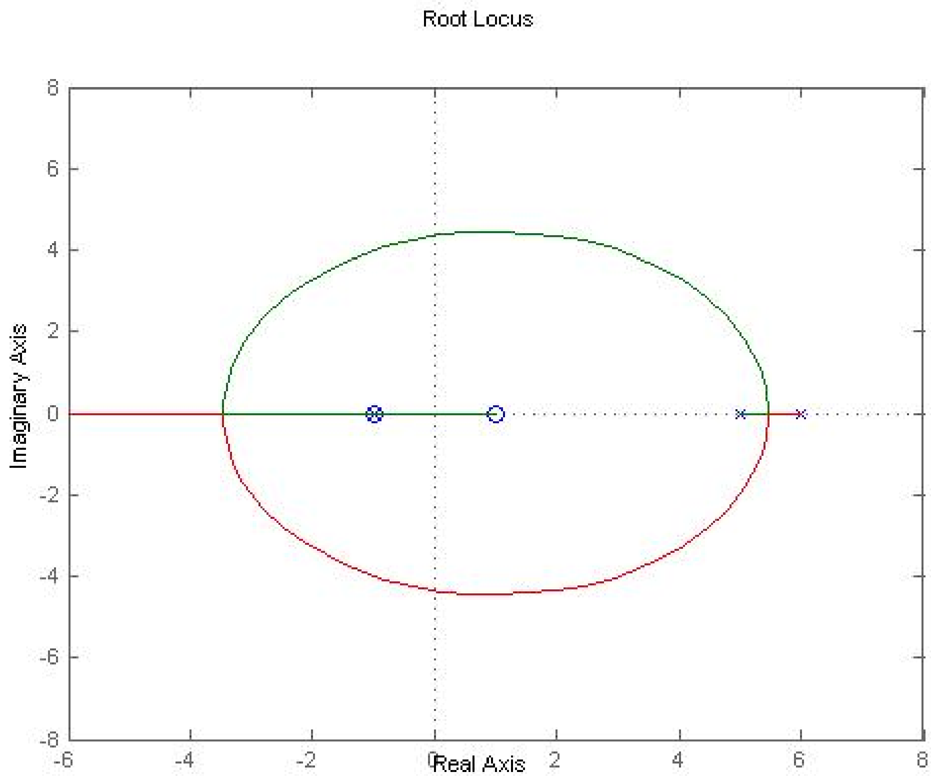
La funzione di trasferimento del sistema ad anello chiuso è

$$W(s) = \frac{N_W(s)}{D_W(s)} = \frac{N_{F'}(s)}{N_{F'}(s) + D_{F'}(s)} = \frac{K'(s-1)}{K'(s-1) + (s-5)(s-6)}$$

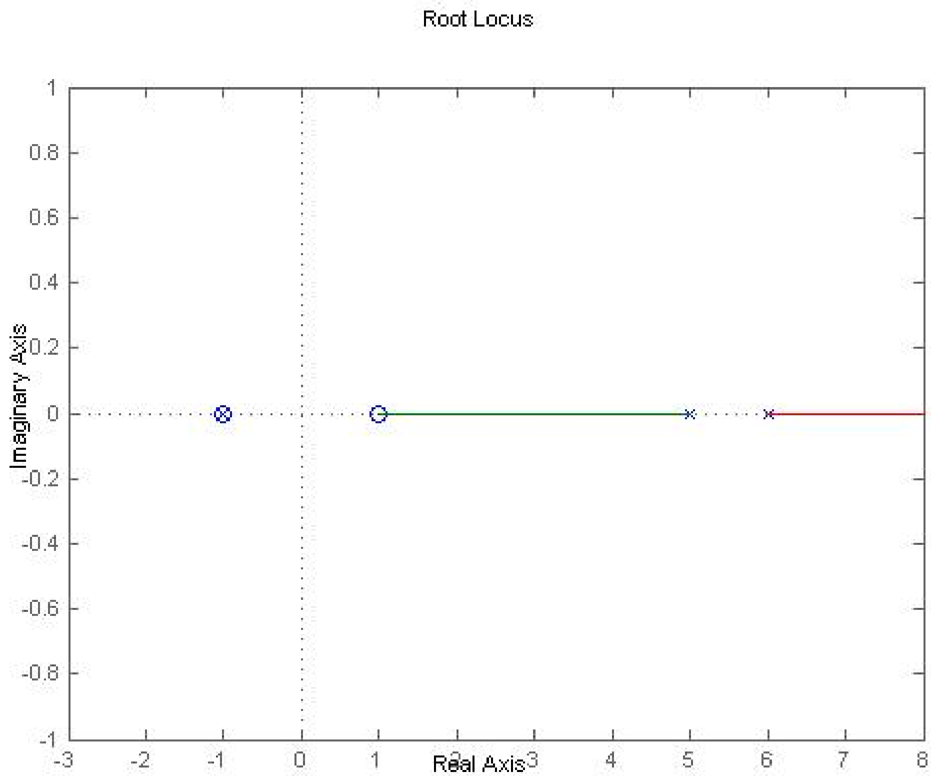
Il luogo delle radici è descritto dall'equazione

$$D_W(s) = K'(s-1) + (s-5)(s-6) = s^2 + (K' - 11)s + 30 - K'$$

al variare di $K' \in \mathbb{R}$. Esso si presenta così




Luogo positivo dopo la compensazione




Luogo negativo dopo la compensazione

Condizione necessaria e sufficiente per l'asintotica stabilità a ciclo chiuso (regola di Cartesio) è

$$11 < K' < 30.$$

Ad esempio si può porre $K' = 20$.

**Punti singolari**

$$\begin{cases} s^2 + (K' - 11)\, s + 30 - K' = 0 \\ 2s + K' - 11 = 0 \end{cases}$$

I punti singolari sono

$$
\begin{aligned}
s_1 &= 1-2\sqrt{5} = -3.4721 \qquad \text{con } K_1' = 4\sqrt{5}+9 = 17.944 \\
s_2 &= 1+2\sqrt{5} = 5.4721 \qquad \text{con } K_2' = -4\sqrt{5}+9 = 0.0557
\end{aligned}
$$

Annullando il termine di ordine 1 del polinomio $D_W(s)$ (basta porre $K' = 11$), si ottengono gli attraversamenti dell'asse immaginario, risolvendo l'equazione

$$s^2 + 19 = 0$$

Gli attraversamenti si hanno per

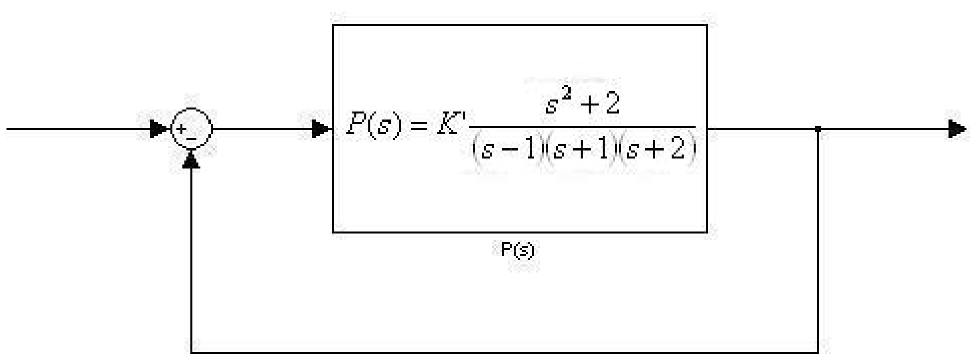
$$s = \pm j\sqrt{19} = \pm j\ 4.36 \quad \text{per } K' = 11$$

Si è risolto l'esercizio mediante un controllore stabilizzante così fatto

$$G(s) = 20\frac{s+1}{s-6}$$

# Sintesi mediante luogo delle radici - Esercizio 2

Stabilizzare asintoticamente il seguente sistema a ciclo chiuso, mediante l'utilizzo del luogo delle radici




La funzione di trasferimento del sistema (instabile) sul ramo diretto è

$$P(s) = \frac{N_P(s)}{D_P(s)} = K'\frac{s^2+2}{(s-1)(s+1)(s+2)}$$

Osservazioni preliminari

$$\begin{aligned} n &= 3,\, m=2 \Rightarrow n-m=1 \\ z_1 &= -\sqrt{2}j,\, z_2=\sqrt{2}j \Longrightarrow \text{il sistema ha gli zeri sull'asse immaginario} \\ p_1 &= 1,\, p_2=-1,\, p_3=-2 \end{aligned}$$

La funzione di trasferimento del sistema ad anello chiuso (retroazione unitaria) è

$$W(s)=\frac{N_W(s)}{D_W(s)}=\frac{N_{F'}(s)}{N_{F'}(s)+D_{F'}(s)}=\frac{K'\left(s^2+2\right)}{K'\left(s^2+2\right)+(s-1)\,(s+1)\,(s+2)}$$

con $F'(s)=G(s)P(s)$.

Il luogo delle radici è descritto dall'equazione

$$D_W(s)=K'\left(s^2+2\right)+(s-1)\,(s+1)\,(s+2)=s^3+(K'+2)\,s^2-s+2K'-2$$

al variare di $K'\in\mathbb{R}$.

**Osservazione** C'è almeno una variazione di segno e quindi almeno una radice positiva. Quindi il sistema a ciclo chiuso è instabile per ogni $K'$ . Bisognerà ricorrere ad un controllore più complicato per stabilizzare il sistema, ma non è immediato capire come procedere, in quanto siamo in un caso di sistema a fase non minima.

**Punti singolari**

$$\begin{cases} s^3+(K'+2)\,s^2-s+2K'-2=0 \\ 3s^2+2\,(K'+2)\,s-1=0 \end{cases}$$

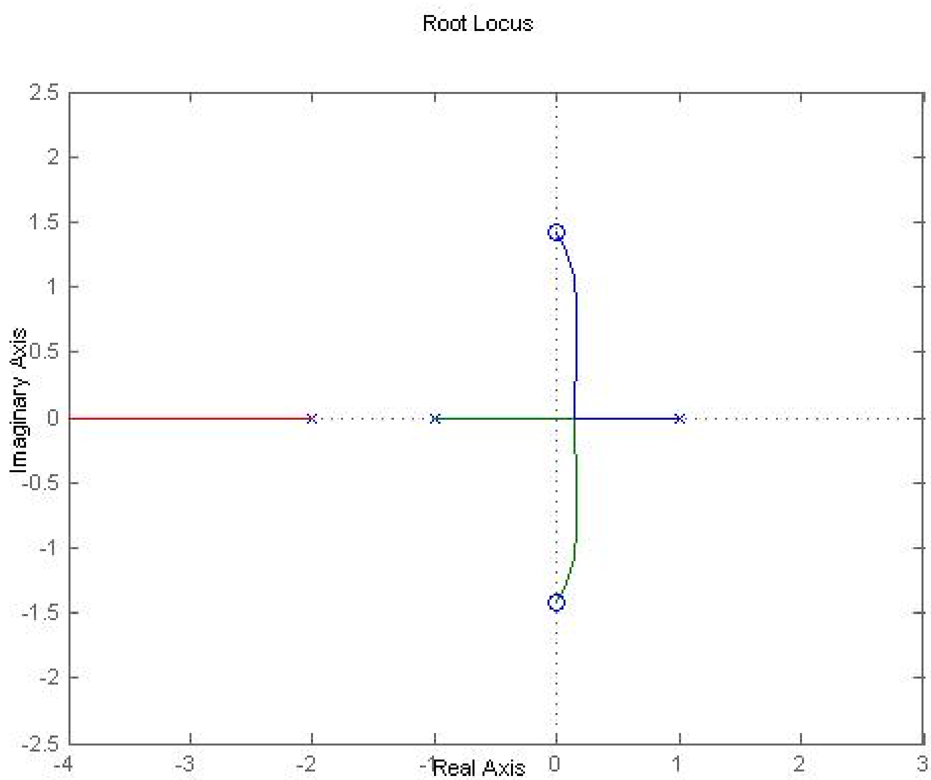
Il sistema ha 4 soluzioni, ma 2 non sono valide perchè corrispondenti a valori non reali di $K'$

$$\begin{aligned} s &= 0.65+j2.92 \quad \text{con} \quad K'=-2.95-j4.54 \\ s &= 0.65-j2.92 \quad \text{con} \quad K'=-2.95+j4.54 \\ s &= 0.15 \quad \text{con} \quad K'=1.04 \\ s &= -1.46 \quad \text{con} \quad K'=-0.15 \end{aligned}$$

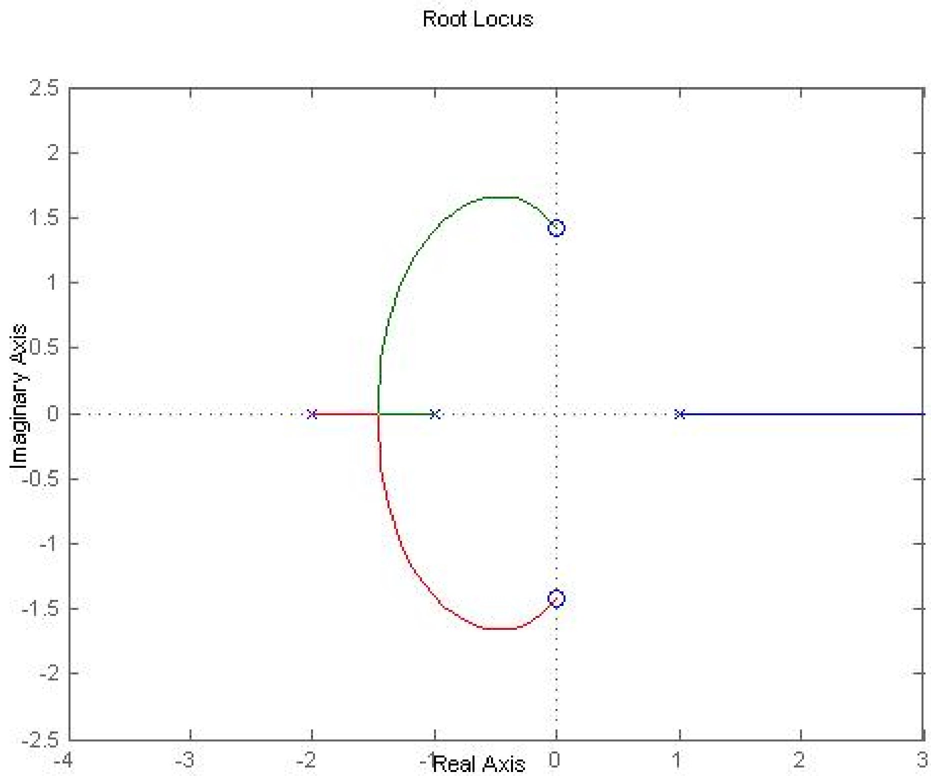
I 2 punti singolari sono quindi

$$\begin{aligned} s_1 &= 0.15 && \text{con} \quad K'_1 = 1.04 \\ s_2 &= -1.46 && \text{con} \quad K'_2 = -0.15 \end{aligned}$$

Il luogo delle radici si presenta nel modo seguente (si noti la presenza dei 2 punti singolari appena calcolati)




Luogo positivo




Luogo negativo

**Stabilizzazione** A partire dal grafico si può fare una considerazione intuitiva: se si riuscisse a spostare in qualche modo verso sinistra il punto singolare posto in $s = 0.15$, si potrebbe avere una parte di luogo positivo interamente a sinistra dell'asse immaginario, e quindi un intervallo di valori di $K'$ che stabilizzi il sistema.

Si potrebbe introdurre uno zero negativo tra i 2 poli posti in -1 ed in 1 (ad esempio in -0.5) ed un polo negativo a sinistra di -2 (ad esempio in -3). In questo modo, per motivi di consistenza, sparisce il punto singolare tra -1 ed 1, continua ad esserci un punto singolare tra -2 e -1 ed infine se ne crea uno a sinistra di -2. Verifichiamo formalmente queste considerazioni intuitive.

Si pone

$$G(s) = \frac{s + 0.5}{s + 3}$$

La funzione di trasferimento sul ramo diretto diventa

$$F'(s) = G(s)P(s) = K'\frac{s+0.5}{s+3}\frac{s^2+2}{(s-1)(s+1)(s+2)} = K'\frac{(s+0.5)(s^2+2)}{(s+3)(s-1)(s+1)(s+2)}$$

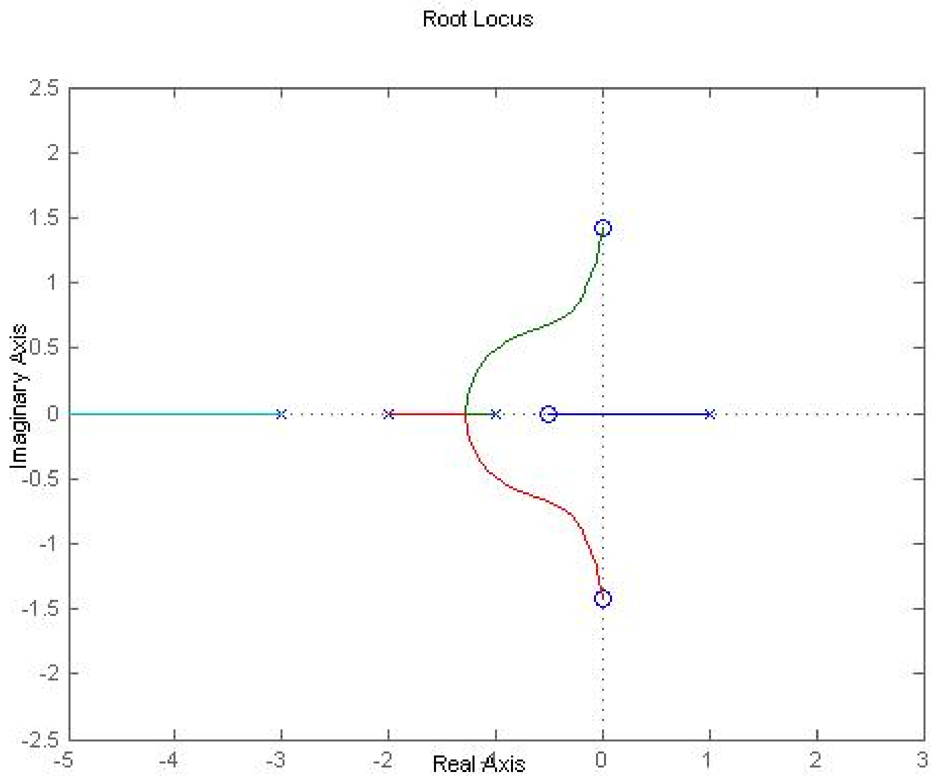
La funzione di trasferimento del sistema ad anello chiuso è

$$W(s) = \frac{N_W(s)}{D_W(s)} = \frac{N_{F'}(s)}{N_{F'}(s)+D_{F'}(s)} = \frac{K'(s+0.5)(s^2+2)}{K'(s+0.5)(s^2+2)+(s+3)(s-1)(s+1)(s+2)}$$

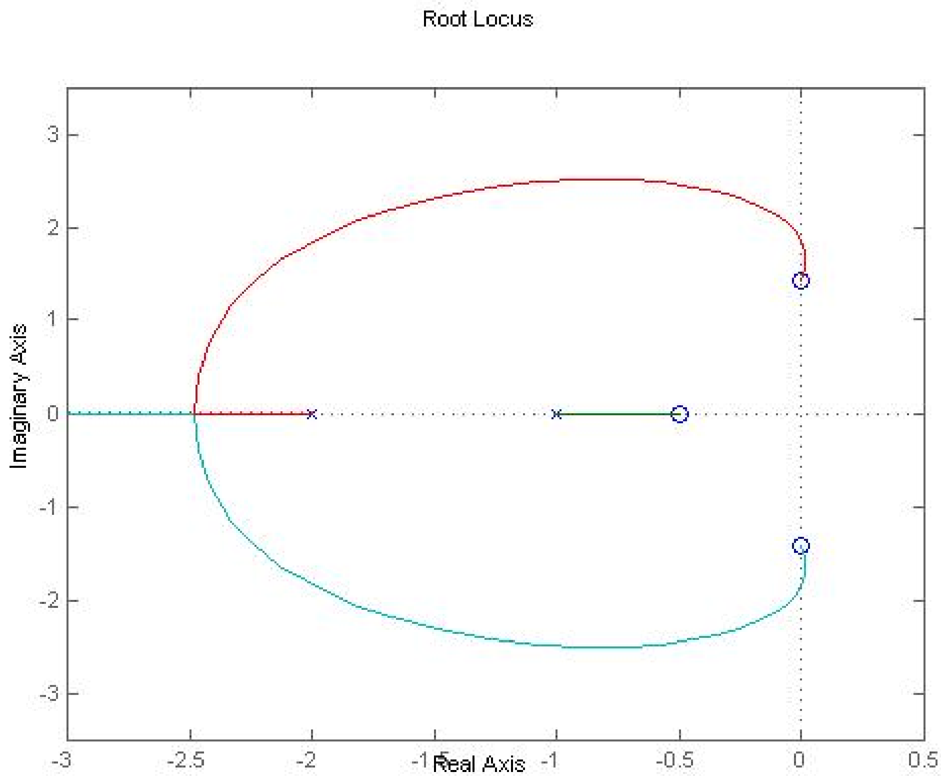
Il luogo delle radici è descritto dall'equazione

$$\begin{aligned} D_W(s) &= K'(s+0.5)\left(s^2+2\right)+(s+3)(s-1)(s+1)(s+2) = \\ &= s^4+(K'+5)s^3+\left(\frac{K'}{2}+5\right)s^2+(2K'-5)s+K'-6 \end{aligned}$$

al variare di $K' \in \mathbb{R}$. Esso si presenta così




Luogo positivo dopo la compensazione




Luogo negativo dopo la compensazione

Condizione necessaria per l'asintotica stabilità a ciclo chiuso è

$$K' > 6.$$

Per avere una condizione necessaria e sufficiente, si applica il criterio di Routh:

$$\begin{array}{|c|llll}
4 & 1 & \frac{K'}{2}+5 & K'-6 \\
3 & K'+5 & 2K'-5 & 0 \\
2 & \frac{(K')^2}{2}+\frac{11}{2}K'+30 & (K')^2-K'-30 & 0 \\
1 & (K')^2+15K' & 0 & \\
0 & (K')^2-K'-30 & 0 &
\end{array}$$

Si ha stabilità asintotica a ciclo chiuso se e solo se

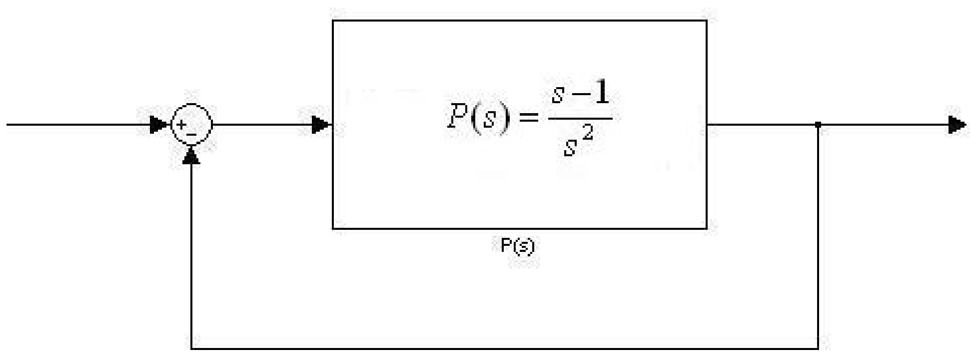
$$K' > 6.$$

Ad esempio si può scegliere $K' = 10$.
Si è risolto l'esercizio mediante un controllore stabilizzante così fatto

$$G(s) = \frac{s + 0.5}{s + 3} \quad \text{e scegliendo } K' > 6.$$

## Sintesi mediante luogo delle radici - Esercizio 3

Stabilizzare asintoticamente il seguente sistema a ciclo chiuso, mediante l'utilizzo del luogo delle radici




La funzione di trasferimento del sistema (instabile) sul ramo diretto è

$$P(s) = \frac{N_P(s)}{D_P(s)} = \frac{s-1}{s^2}$$

Osservazioni preliminari

$$\begin{aligned} n &= 2,\ m = 1 \Rightarrow n - m = 1 \\ z_1 &= 1 \Longrightarrow \text{il sistema non è a fase minima} \\ p_1 &= 0,\ p_2 = 0 \end{aligned}$$

La funzione di trasferimento del sistema ad anello chiuso (retroazione unitaria), aggiungendo un guadagno $G(s) = K'$ sul ramo diretto, è

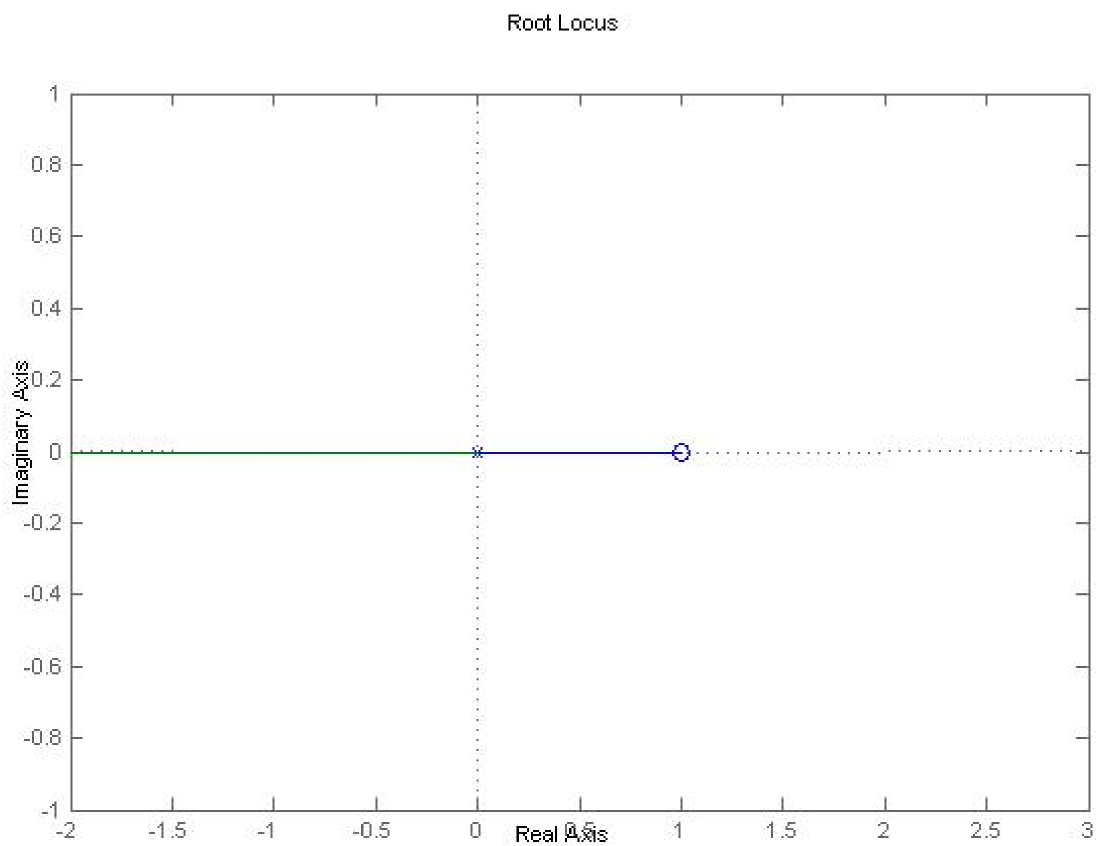
$$W(s) = \frac{N_W(s)}{D_W(s)} = \frac{N_{F'}(s)}{N_{F'}(s) + D_{F'}(s)} = \frac{K'(s-1)}{K'(s-1) + s^2}$$

con $F'(s) = G(s)P(s)$.

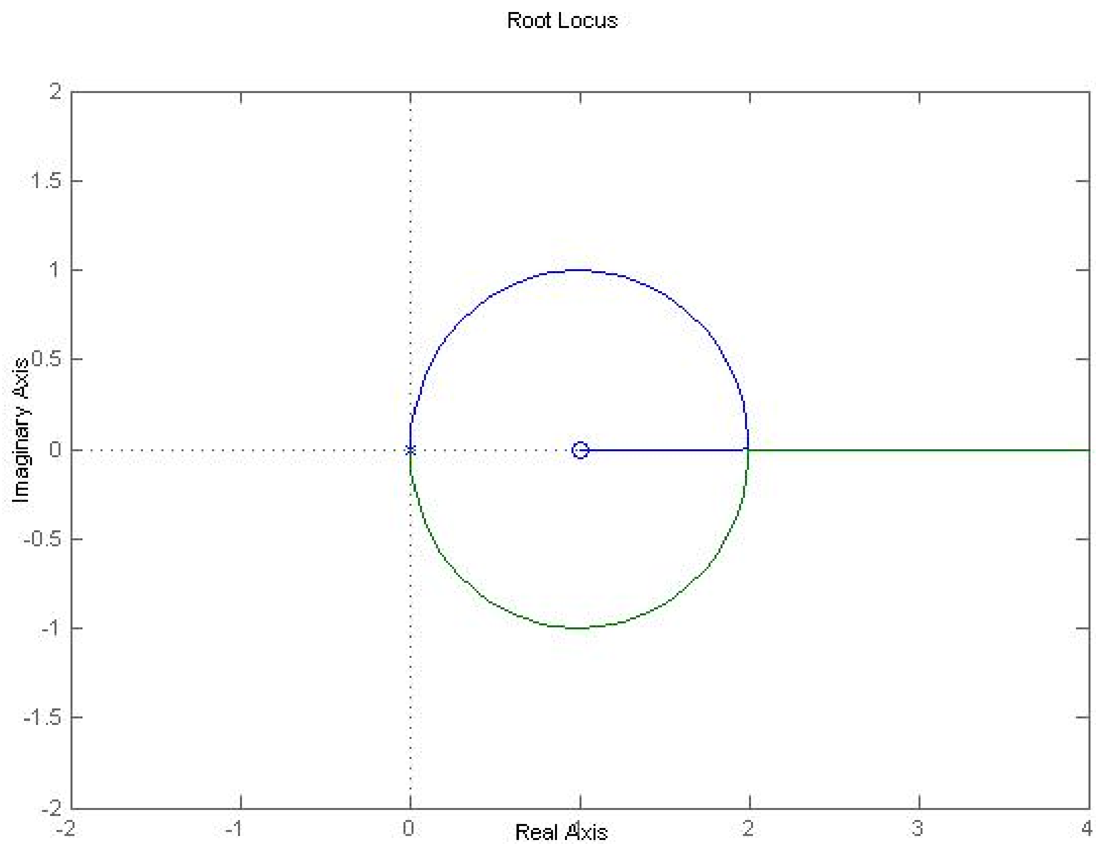
Il luogo delle radici è descritto dall'equazione

$$D_W(s) = K'(s-1) + s^2 = s^2 + K's - K'$$

al variare di $K' \in \mathbb{R}$.




Luogo positivo




Luogo negativo

**Stabilizzazione** Per $K' \neq 0$ ci sono sempre 2 variazioni di segno e quindi 2 radici positive. Quindi il sistema a ciclo chiuso è instabile per ogni $K' \neq 0$. Il caso $K' = 0$ non ha senso (si tornerebbe al sistema di partenza). Bisognerà ricorrere ad un controllore più complicato per stabilizzare il sistema, ma non è immediato capire come procedere.

Un problema di questo genere si può risolvere ricorrendo ad un procedimento che non si basa sul luogo delle radici, ma su considerazioni di tipo analitico.

**Teorema** *Dato un processo di ordine n, esiste sempre un controllore proprio di ordine n-1 che stabilizza asintoticamente il sistema.*

Il suddetto teorema è uno strumento molto potente che serve a risolvere un problema più forte di quello della stabilizzazione: consente infatti di imporre la coincidenza dei poli del sistema a ciclo chiuso con valori prefissati (assegnazione dei poli).

Nel caso in esame, poichè $n = 2$, basterà ricorrere ad un controllore proprio di ordine 1

$$G(s) = \frac{as + b}{s + c}$$

La funzione di trasferimento sul ramo diretto è

$$F'(s) = G(s)P(s) = \frac{as + b}{s + c}\frac{s - 1}{s^2} = \frac{(s - 1)(as + b)}{s^2 (s + c)}$$

La funzione di trasferimento del sistema ad anello chiuso è

$$W(s) = \frac{N_W(s)}{D_W(s)} = \frac{N_{F'}(s)}{N_{F'}(s) + D_{F'}(s)} = \frac{(s - 1)(as + b)}{(s - 1)(as + b) + s^2 (s + c)}.$$

I poli del sistema ad anello chiuso sono soluzioni di $D_W(s) = 0$. Posso imporre la coincidenza di essi con valori prefissati. Ad esempio si possono porre 3 poli coincidenti in -1

$$(s - 1)(as + b) + s^2 (s + c) = (s + 1)^3$$

e quindi

$$s^3 + (a + c) s^2 + (b - a) s - b = s^3 + 3s^2 + 3s + 1$$

Si tratta, in definitiva, di risolvere il sistema di equazioni

$$\left\{ \begin{array}{c} (a + c) = 3 \\ (b - a) = 3 \\ b = -1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a = -4 \\ b = -1 \\ c = 7 \end{array} \right.$$

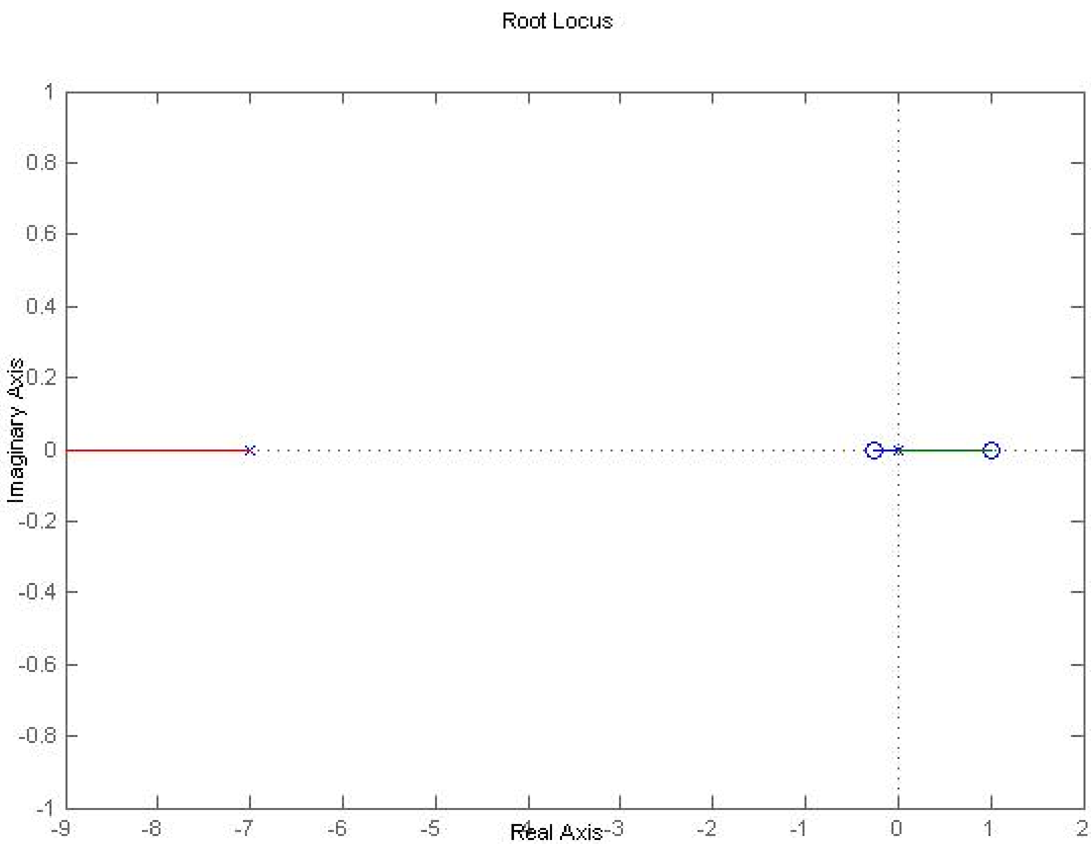
Si è quindi risolto l'esercizio mediante un controllore stabilizzante così fatto

$$G(s) = \frac{-4s - 1}{s + 7}$$

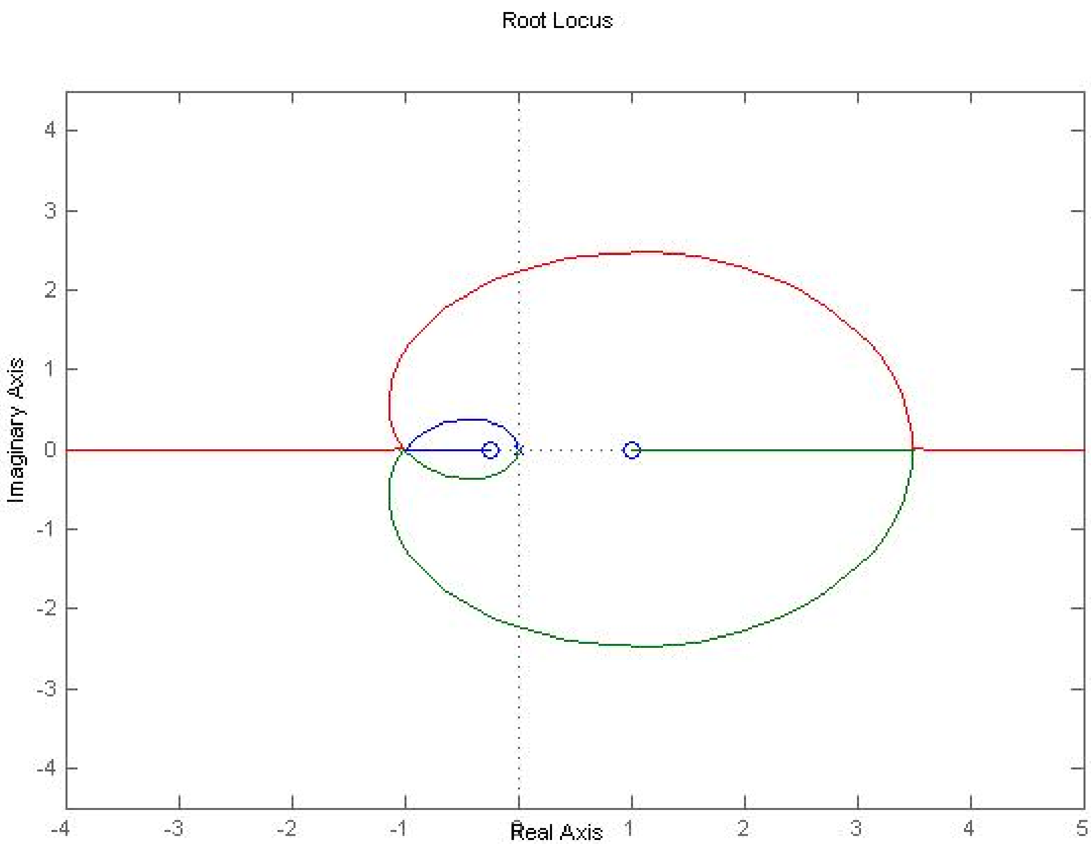
La nuova funzione di trasferimento sul ramo diretto è

$$F'(s) = G(s)P(s) = \frac{-4s-1}{s+7}\frac{s-1}{s^2} = -4\frac{(s-1)\left(s+\frac{1}{4}\right)}{s^2\,(s+7)}$$

Il luogo delle radici (aggiungendo un fattore -$\frac{K'}{4}$ sul ramo diretto) si presenta nel modo seguente




Luogo positivo dopo la compensazione

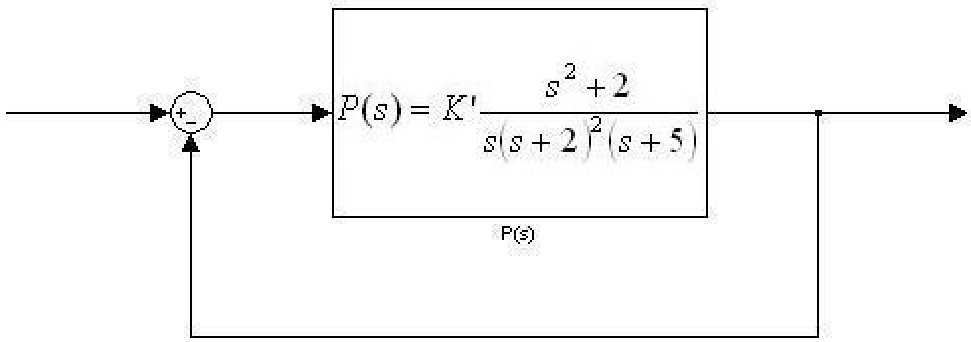



Luogo negativo dopo la compensazione

**Punti singolari** Non c'è bisogno di calcolarli esplicitamente. Si nota infatti il punto triplo in $s = -1$ per $K' = -4$ (soluzione del problema in esame), un punto doppio in $s = 0$ per $K' = 0$ (poli del sistema originario) ed un altro punto singolare nel ramo di luogo negativo a destra dello zero positivo.

## Sintesi mediante luogo delle radici - Esercizio 4

Stabilizzare asintoticamente il seguente sistema a ciclo chiuso, mediante l'utilizzo del luogo delle radici




La funzione di trasferimento del sistema (semplicemente stabile) sul ramo diretto è

$$P(s) = \frac{N_P(s)}{D_P(s)} = K'\frac{s^2+2}{s\ \ (s+2)^2\,(s+5)}$$

Osservazioni preliminari

$$\begin{aligned} n &= 4,\ m=2 \Rightarrow n-m=2 \\ z_1 &= -j\sqrt{2},\ z_2 = j\sqrt{2} \Longrightarrow \text{il sistema ha gli zeri sull'asse immaginario} \\ p_1 &= 0,\ p_2=-2,\ p_3=-2,\ p_4=-5 \end{aligned}$$

Il centro degli asintoti è

$$s_o = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i}{(n-m)} = \frac{0-2-2-5-j\sqrt{2}+j\sqrt{2}}{2} = -\frac{9}{2}$$

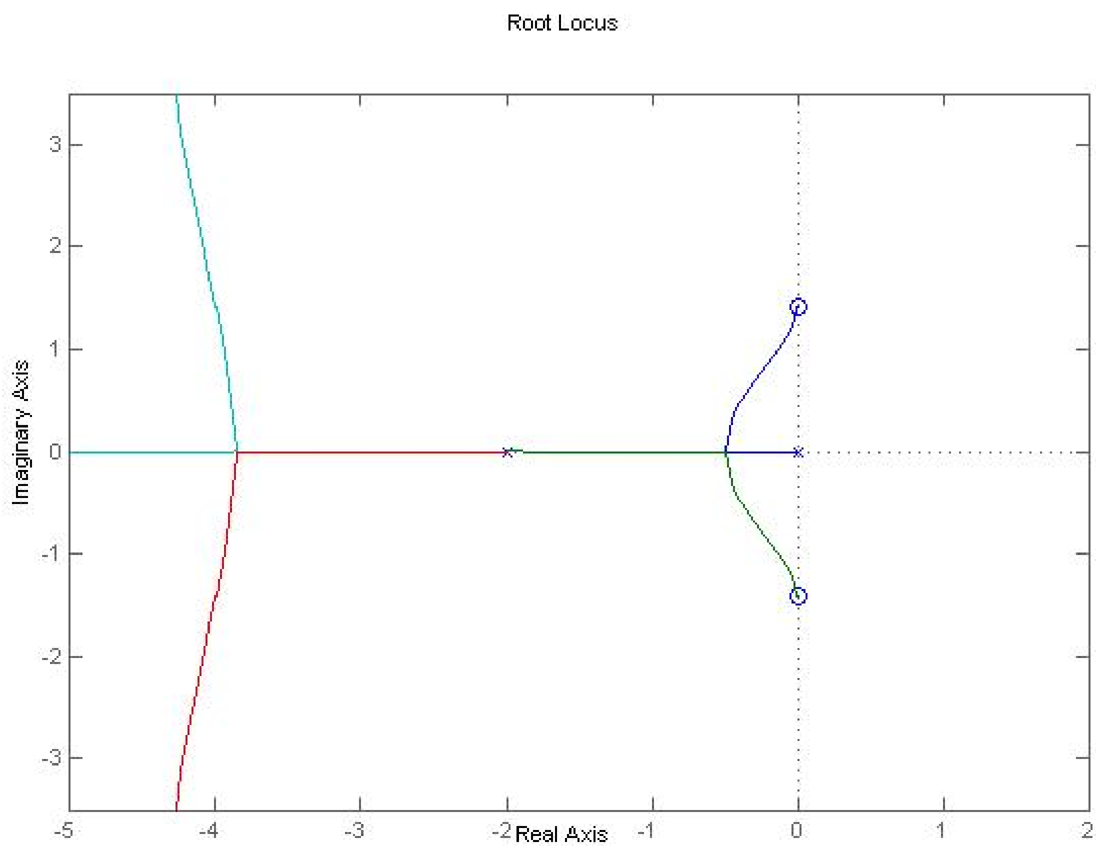
La funzione di trasferimento del sistema ad anello chiuso (retroazione unitaria) è

$$W(s) = \frac{N_W(s)}{D_W(s)} = \frac{N_{P'}(s)}{N_P(s)+D_P(s)} = \frac{K'\,(s^2+2)}{K'\,(s^2+2)+s\ \ (s+2)^2\,(s+5)}.$$

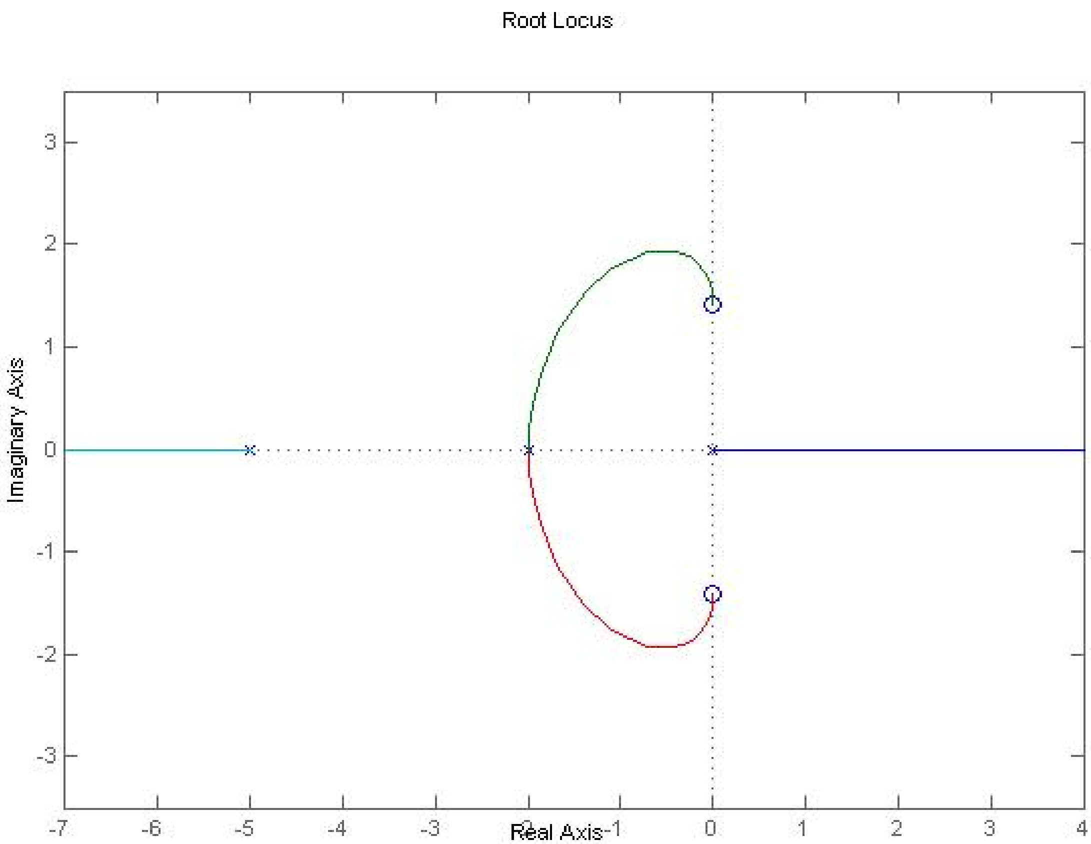
Il luogo delle radici è descritto dall'equazione

$$D_W(s) = K'\left(s^2+2\right)+s\ \ (s+2)^2\,(s+5) = s^4+9s^3+(K'+24)\,s^2+20s+2K'$$

al variare di $K' \in \mathbb{R}$.
Il grafico si presenta nel modo seguente




Luogo positivo




Luogo negativo

**Stabilizzazione** Condizione necessaria per l'asintotica stabilità a ciclo chiuso è
$$K' > 0.$$

Per avere una condizione necessaria e sufficiente, si applica il criterio di Routh:
$$\begin{array}{|c|llll}
4 & 1 & K'+24 & 2K' \\
3 & 9 & 20 & 0 \\
2 & 9K'+196 & 18K' & \\
1 & 18K'+3920 & 0 & \\
0 & 18K' & &
\end{array}$$

Si ha stabilità asintotica a ciclo chiuso se e solo se

$$K' > 0$$

Si può scegliere un qualsiasi $K'$ positivo ed il problema è risolto.

**Punti singolari** Non c'è bisogno di calcolarli esplicitamente. C'è sicuramente il punto doppio in $s = -2$ per $K' = 0$ (poli del sistema originario), un punto singolare tra -5 e -2 ed uno tra -2 e 0.

**Diagrammi di Nyquist** Essendo in un caso di retroazione unitaria, si può anche ricorrere al diagramma di Nyquist per ritrovare le considerazioni effettuate in precedenza. La funzione di trasferimento $P(s)$ va riscritta opportunamente, trascurando il fattore moltiplicativo $K'$

$$\bar{P}(s) = \frac{s^2+2}{s\ \left(s+2\right)^2\left(s+5\right)} = \frac{1}{10}\frac{\left(1+\frac{s^2}{2}\right)}{s\ \left(1+\frac{s}{2}\right)^2\left(1+\frac{s}{5}\right)}$$

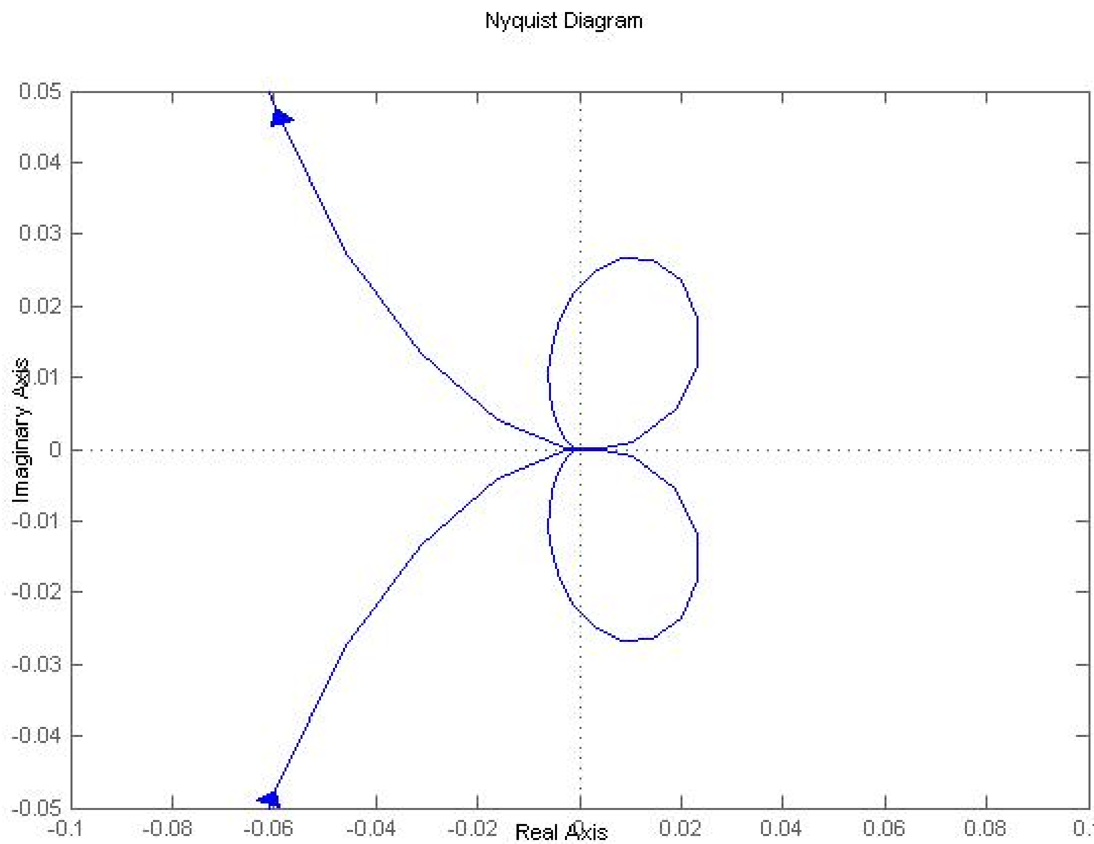



Diagramma di Nyquist per K'>0

Si vede che per qualsiasi valore di guadagno positivo, il diagramma di Nyquist non circonda mai il punto -1. Quindi avrò, essendo $P_{AP} = 0$ il numero di poli a parte reale positiva del sistema a catena aperta, ed $N$ il numero di giri che il diagramma di Nyquist compie in senso antiorario intorno al punto critico $-1 + j0$:

$$P_{CH} = P_{AP} - N = 0$$

dove si è indicato con $P_{CH}$ il numero di poli a parte reale positiva del sistema retroazionato (criterio di Nyquist). Il sistema è quindi asintoticamente stabile $\forall K' > 0$.

Per valori negativi del guadagno, invece, il diagramma si presenta così

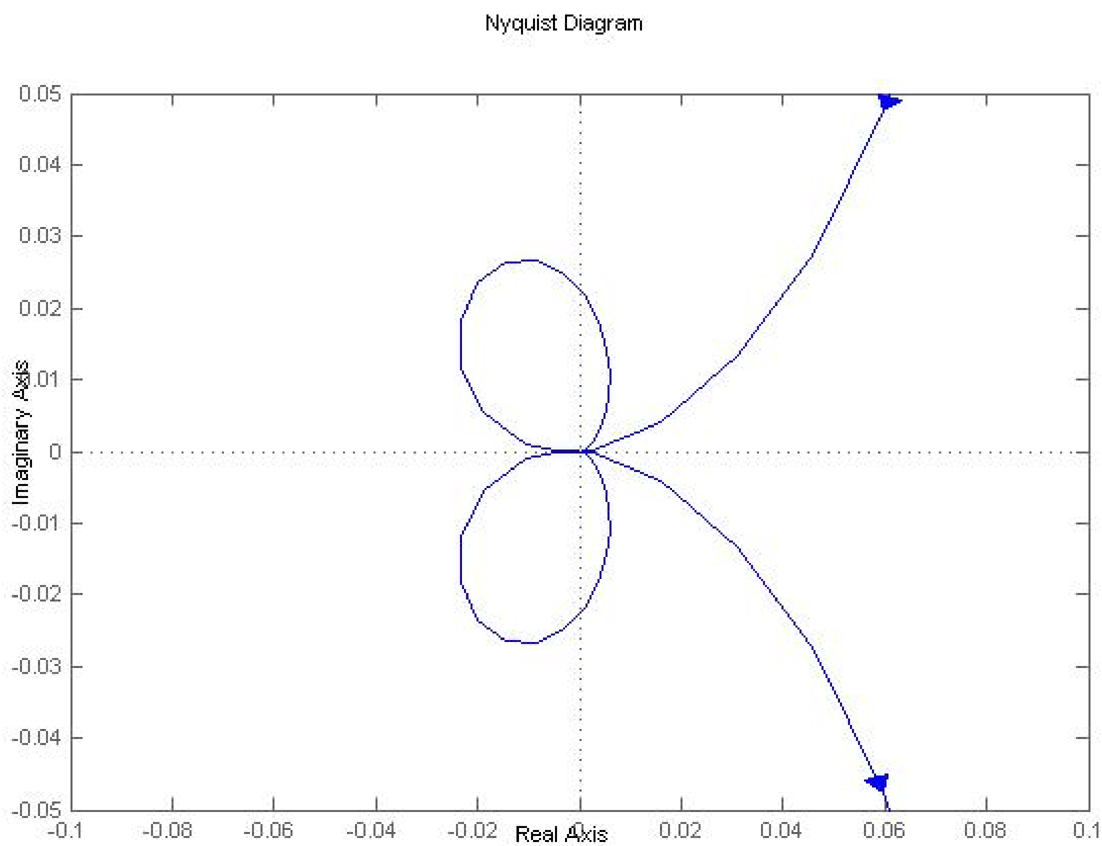



Diagramma di Nyquist per K'<0

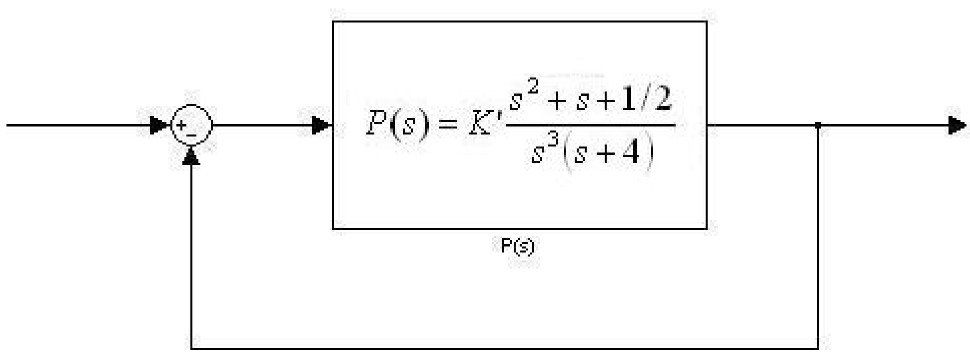
Si potranno avere 2 situazioni. Per $K' < 0$ sufficientemente grande in modulo, il diagramma compirà 3 giri in senso orario intorno al punto critico ($N = -3$), per valori più vicini a zero (ma sempre negativi), si avrà 1 giro in senso orario ($N = -1$). Si avrà, rispettivamente (essendo $P_{AP} = 0$)

$$\begin{aligned} P_{CH} &= -N = 3 \qquad\qquad K' < 0 \text{ “grande” in modulo} \\ P_{CH} &= -N = 1 \qquad\qquad K' < 0 \text{ “piccolo” in modulo} \end{aligned}$$

Quindi il sistema a retroazione, per il criterio di Nyquist, sarà instabile per ogni valore di $K' < 0$. Si ritrovano così le considerazioni viste mediante lo studio del luogo delle radici.

## Esercizio proposto (homework) con soluzione

Stabilizzare asintoticamente il seguente sistema a ciclo chiuso, mediante l'utilizzo del luogo delle radici




La funzione di trasferimento del sistema (instabile) sul ramo diretto è

$$P(s) = \frac{N_P(s)}{D_P(s)} = K' \frac{s^2 + s + \frac{1}{2}}{s^3 \ (s+4)}$$

Osservazioni preliminari

$$\begin{aligned} n &= 4,\, m = 2 \Rightarrow n - m = 2 \\ z_1 &= \frac{-1-j}{2},\, z_2 = \frac{-1+j}{2} \Longrightarrow \text{sistema a fase minima} \\ p_1 &= 0,\, p_2 = 0,\, p_3 = 0,\, p_4 = -4 \end{aligned}$$

Il centro degli asintoti è

$$s_o = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i}{(n-m)} = \frac{0+0+0-4-\frac{-1-j}{2}-\frac{-1+j}{2}}{2} = -\frac{3}{2}$$

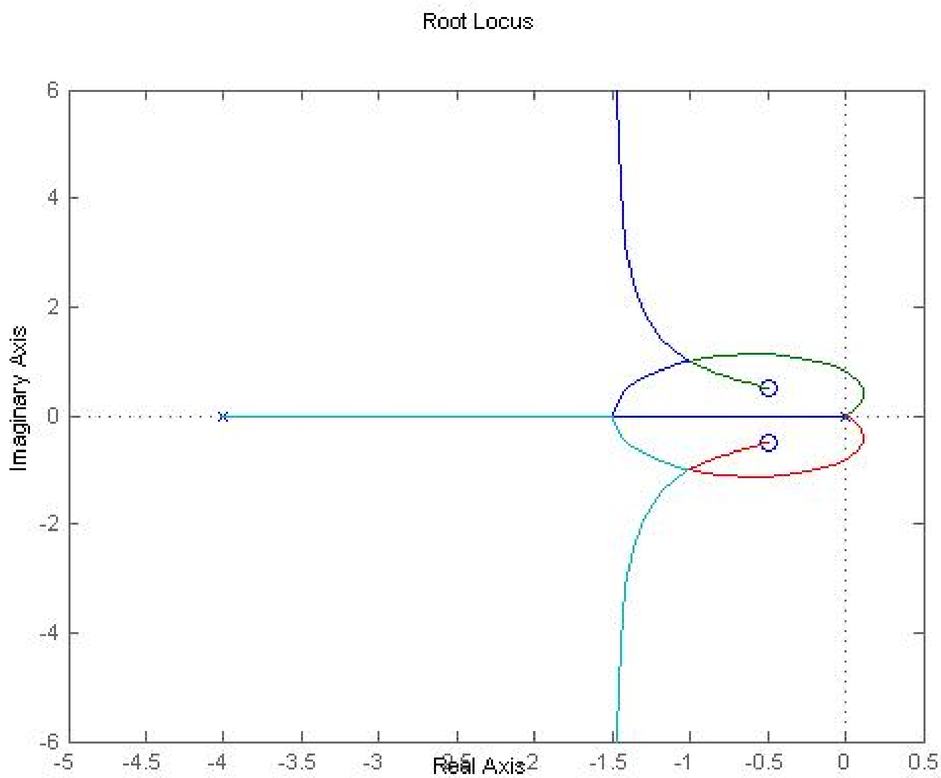
La funzione di trasferimento del sistema ad anello chiuso (retroazione unitaria) è

$$W(s) = \frac{N_W(s)}{D_W(s)} = \frac{N_{P'}(s)}{N_P(s) + D_P(s)} = \frac{K'\left(s^2 + s + \frac{1}{2}\right)}{K'\left(s^2 + s + \frac{1}{2}\right) + s^3\ \ (s+4)}.$$

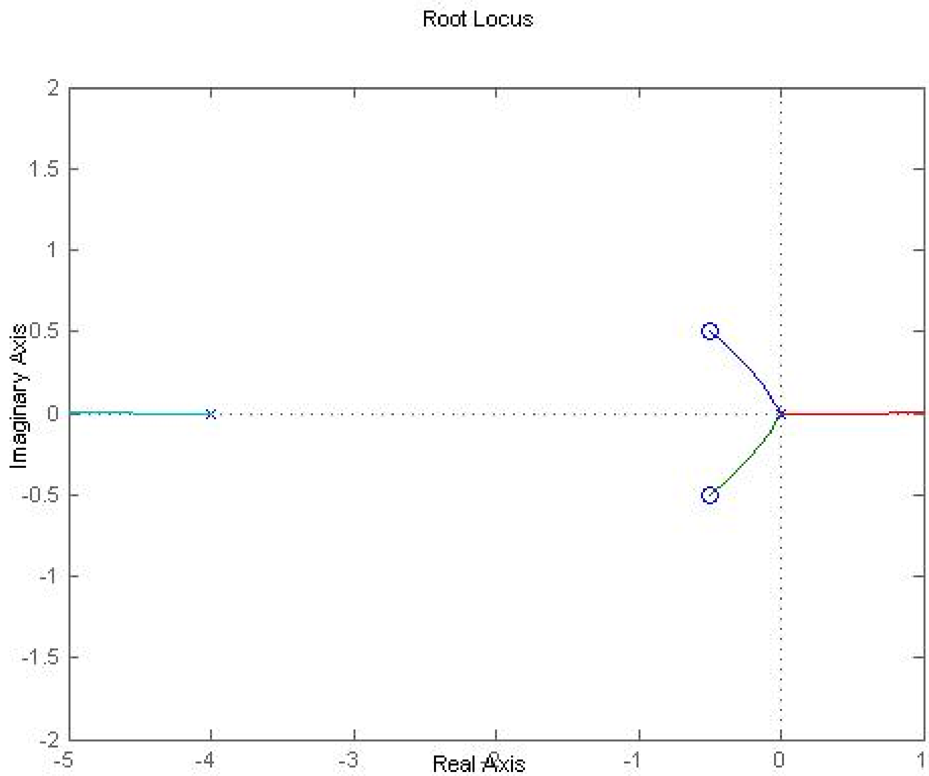
Il luogo delle radici è descritto dall'equazione

$$D_W(s) = K'\left(s^2 + s + \frac{1}{2}\right) + s^3\ \ (s+4) = s^4 + 4s^3 + K's^2 + K's + \frac{K'}{2}$$

al variare di $K' \in \mathbb{R}$.
Il luogo delle radici si presenta nel modo seguente




Luogo positivo




Luogo negativo

**Stabilizzazione** Condizione necessaria per l'asintotica stabilità a ciclo chiuso è

$$K' > 0.$$

Per avere una condizione necessaria e sufficiente, si applica il criterio di Routh:

$$\begin{array}{|c|lll}
4 & 1 & K' & \frac{K'}{2} \\
3 & 4 & K' & \\
2 & 3K' & 2K' & \\
1 & 3\left(K'\right)^2 - 8K' & 0 & \\
0 & 2K' & &
\end{array}$$

Si ha stabilità asintotica a ciclo chiuso se e solo se

$$K' > \frac{8}{3}$$

Si può scegliere $K' = 5 > \frac{8}{3}$ ed il problema è risolto.
**Punti singolari**

$$\begin{cases} s^4 + 4s^3 + K's^2 + K's + \frac{K'}{2} = 0 \\ 4s^3 + 12s^2 + 2K's + K' = 0 \end{cases}$$

Il sistema ha 5 soluzioni, tutte valide ($K' \in \mathbb{R}$):

$$\begin{array}{rcll} s_1 & = & -\dfrac{3}{2} & \text{con } K'_1 = \dfrac{27}{4} \\ s_{2/3} & = & 0 & \text{con } K'_{2/3} = 0 \text{ (soluzione doppia)} \\ s_4 & = & -1 - j & \text{con } K'_4 = 8 \\ s_5 & = & -1 + j & \text{con } K'_5 = 8 \end{array}$$

Si noti la presenza di due punti singolari complessi e coniugati.