Corso di Controlli Automatici
Proff. M. D. Di Benedetto e S. Di Gennaro

Esercitazione del 18/5/2011

Ing. Alessandro Borri, Prof. Giordano Pola
{alessandro.borri,giordano.pola}@univaq.it

1 Osservatori asintotici

Dato un sistema lineare S, l'osservatore asintotico è un sistema lineare che prende in ingresso l'ingresso $u(t)$ e l'uscita $y(t)$ di S e fornisce in uscita una stima ξ dello stato x di S che converge asintoticamente a x. Più formalmente, dato il seguente sistema lineare tempo continuo:

$$\begin{cases} dx/dt = Ax + Bu, x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, \\ y = Cx, y \in \mathbb{R}^p, \end{cases} \tag{1}$$

si definisce osservatore di (1), il seguente sistema dinamico

$$\begin{cases} d\xi/dt = A\xi + Bu + G(y - C\xi), \xi \in \mathbb{R}^n, \\ \eta = \xi, \eta \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{2}$$

dove G è una opportuna matrice e ξ rappresenta la stima dello stato x. Definendo l'errore tra la stima ξ dello stato x ed x come

$$e = \xi - x,$$

si ottiene facilmente

$$de/dt = (A - GC)e. \tag{3}$$

E' facile verificare che lo stato ξ del sistema (2) converge asintoticamente a x se e solo se la matrice $A - GC$ è asintoticamente stabile.
Nella progettazione di un osservatore asintotico grande importanza riveste la velocità di convergenza dello stato ξ allo stato x, e tale velocità è legata agli autovalori della matrice $A - GC$. Dato un polinomio:

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0,$$

di grado n, il problema è quello di trovare se esiste una matrice G tale che la matrice $A - GC$ abbia gli autovalori coincidenti con le radici del polinomio $p(\lambda)$. Il seguente risultato caratterizza completamente questo problema.

Teorema: *E' possibile assegnare ad arbitrio gli autovalori della matrice $A - GC$ se e solo se il sistema (1) è osservabile.*

Inoltre qualora le ipotesi di osservabilità siano verificate è possibile sintetizzare un osservatore che risolva il problema in esame in modo esplicito. Detta μ l'ultima colonna dell'inversa della matrice di osservabilità associata al sistema (1), lo stato ξ dell'osservatore (1) con

$$G = p(A) \cdot \mu, \tag{4}$$

converge allo stato x con autovalori dati da $p(\lambda)$, o in altre parole gli autovalori di $A - GC$ coincidono con le radici di $p(\lambda)$. La formula (4) è nota in letteratura come *formula di Ackermann*.

Esercizio 1 *Sia dato il seguente sistema lineare tempo continuo:*

$$\begin{cases} dx/dt = Ax + Bu, x \in \mathbb{R}^3, u \in \mathbb{R}, \\ y = Cx, y \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{5}$$

dove:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si progetti se è possibile un osservatore asintotico la cui uscita converge allo stato x con velocità di convergenza almeno uguale a quella di e^{-3t}.

Svolgimento - La matrice di osservabilità del sistema (5) è:

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -9 & 0 \end{bmatrix}.$$

E' facile verificare che il rango di O è tre e pertanto il sistema (5) è osservabile: dunque è possibile progettare un osservatore che converga allo stato x con velocità data da

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -3.$$

Utilizziamo dunque la formula di Ackermann (4) per sintetizzare la matrice G. L'inversa della matrice di osservabilità O è data da:

$$O^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 9 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3 & -4 & -1 \end{bmatrix},$$

e pertanto $\mu = \begin{bmatrix} -1/8 \\ -1/8 \\ -1/8 \end{bmatrix}$. Da cui calcolando,

$$p(A) = (A + 3I)^3 = \begin{bmatrix} 8 & 0 & -56 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 64 \end{bmatrix}$$

si ottiene:

$$G = p(A) \cdot \mu = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ -8 \end{bmatrix}.$$

Pertanto l'osservatore richiesto dall'esercizio è dato da:

$$\begin{cases} d\xi/dt = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xi + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ -8 \end{bmatrix} (y - \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xi), \xi \in \mathbb{R}^3, \\ \\ \eta = \xi, \eta \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Esercizio 2 *Sia dato il seguente sistema lineare tempo continuo:*

$$\begin{cases} dx/dt = Ax + Bu, x \in \mathbb{R}^3, u \in \mathbb{R}, \\ y = Cx, y \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{6}$$

dove:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Si progetti se è possibile un osservatore asintotico la cui uscita converge allo stato x con velocità di convergenza almeno uguale a quella di e^{-t}.

Svolgimento - La matrice di osservabilità associata al sistema (6) è:

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Il rango della matrice O è uno e pertanto non è possibile assegnare ad arbitrio la velocità di convergenza all'osservatore. D'altronde, qualora gli autovalori relativi alle dinamiche non osservabili verificassero le condizioni della specifica, sarebbe comunque possibile progettare un osservatore asintotico la cui velocità di convergenza sia al più uguale a quella di e^{-t}. Verifichiamo dunque quali degli autovalori della matrice A sono osservabili e non osservabili. Gli autovalori della matrice A sono:

$$\lambda_1^A = 1; \quad \lambda_2^A = -1; \quad \lambda_3^A = -2 \ .$$

Per mezzo del PBH Test valutiamo quali degli autovalori di A sono osservabili:

$$\rho\left(\begin{bmatrix} A - \lambda_1^A I \\ C \end{bmatrix}\right) = \rho\left(\begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = 3,$$

$$\rho\left(\begin{bmatrix} A - \lambda_2^A I \\ C \end{bmatrix}\right) = \rho\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = 2,$$

$$\rho\left(\begin{bmatrix} A - \lambda_3^A I \\ C \end{bmatrix}\right) = \rho\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = 2,$$

e dunque l'autovalore $\lambda_1^A = 1$ è osservabile mentre gli autovalori $\lambda_2^A = -1$ e $\lambda_3^A = -2$ sono non osservabili. D'altronde gli autovalori $\lambda_2^A = -1$ e $\lambda_3^A = -2$ verificano direttamente le specifiche e pertanto il problema di sintesi dell'osservatore ammette soluzione. Dalla discussione fatta è conveniente scrivere il sistema di partenza in forma canonica di osservabilità in modo da estrarre le dinamiche osservabili cui assegnare un autovalore compatibile con le specifiche come ad esempio $\lambda = -1$. Osservando la matrice di osservabilità O è facile verificare che il sottospazio di inosservabilità è:

$$\mathcal{I} = \mathcal{N}(O) = span\{v_1, v_2\}, \qquad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Sulla base del sottospazio $\mathcal{I}$ è possibile costruire la matrice di trasformazione T che porti il sistema (6) in forma canonica di osservabilità. Ricordiamo che:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} v & v_1 & v_2 \end{bmatrix},$$

dove v è un vettore che renda la matrice T^{-1} invertibile. Dunque per una scelta di $v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ si ha:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

da cui:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sulla base di T possiamo costruire la forma canonica di osservabilità del sistema (6):

$$\begin{cases} d\tilde{x}/dt = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u \\ y = \tilde{C}\tilde{x}, \end{cases} \tag{7}$$

dove:

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= TAT^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \\ \tilde{B} &= TB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}; \\ \tilde{C} &= CT^{-1} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Il sottosistema osservabile è:

$$\begin{cases} dx_1/dt = x_1 - u \\ y_1 = -x_1. \end{cases} \tag{8}$$

Il sistema (8) è osservabile e pertanto possiamo costruire un osservatore asintotico

$$\begin{cases} d\xi_1/dt = A_{11}\xi_1 + B_1 u + G_1(y - C_1\xi_1), \\ \eta_1 = \xi_1, \end{cases} \tag{9}$$

che converga con una velocità pari $e^{\lambda t}$ con λ arbitrario, oppure in modo del tutto equivalente,

$$A_{11} - G_1 C_1 = \lambda.$$

Scegliendo ad esempio $\lambda = -1$ si ottiene $G_1 = -2$. Sulla base dell'osservatore (9) relativo al sistema (8) è possibile trovare un osservatore relativo al sistema (7),

$$\begin{cases} d\tilde{\xi}/dt = \tilde{A}\tilde{\xi} + \tilde{B}u + \tilde{G}(y - \tilde{C}\tilde{\xi}), \\ \tilde{\eta} = \tilde{\xi}, \end{cases}$$

dove:

$$\tilde{G} = \begin{bmatrix} -2 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix}, g_2, g_3 \in \mathbb{R}.$$

Tenendo conto del cambiamento di base possiamo derivare l'espressione dell'osservatore per il sistema (6). Infatti, dato che:

$$\tilde{A} - \tilde{G}\tilde{C} = T(A - T^{-1}\tilde{G}C)T^{-1},$$

si ottiene:

$$G = T^{-1}\tilde{G} = \begin{bmatrix} g_2 \\ g_3 \\ -2 \end{bmatrix}, g_2, g_3 \in \mathbb{R}.$$

Il seguente osservatore verifica quindi le specifiche richieste:

$$\begin{cases} d\xi/dt = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xi + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} g_2 \\ g_3 \\ -2 \end{bmatrix} (y - \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xi), \\ \eta = \xi. \end{cases}$$

Esercizio 3 *Dato il sistema lineare tempo continuo:*

$$\begin{cases} dx/dt = Ax + Bu, x \in \mathbb{R}^2, u \in \mathbb{R}, \\ y = Cx, y \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{10}$$

dove:

$$A = \begin{bmatrix} -a-1 & -a \\ -1 & -1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & a \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R},$$

si determinino tutti i valori del parametro a per cui esista un osservatore asintotico che converge allo stato x del sistema (10) con velocità pari a quella di $e^{-(1/2)t}$.

Svolgimento - La matrice di osservabilità associata al sistema (10) è:

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ -2a-1 & -2a \end{bmatrix},$$

da cui:

$$\det(O) = a(2a-1) \neq 0 \iff a \neq 0, a \neq 1/2.$$

Dunque per $a \neq 0$ e $a \neq 1/2$, è possibile costruire un osservatore asintotico che converge arbitrariamente velocemente allo stato x del sistema (10) ed in particolare con velocità pari a $e^{-(1/2)t}$. Per i valori di singolarità $a = 0$ e $a = 1/2$ bisogna studiare gli autovalori non osservabili e verificare se questi autovalori verificano direttamente le specifiche. Vediamo in dettaglio ogni caso.

Caso 1) $a \neq 0, a \neq 1/2$.

In questo caso O è invertibile e possiamo quindi applicare la formula di Ackermann. Dunque $p(\lambda) = (\lambda + 1/2)^2 = \lambda^2 + \lambda + 1/4$ ed inoltre:

$$O^{-1} = \frac{1}{a(2a-1)} \begin{bmatrix} -2a & -a \\ 2a+1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pertanto:

$$\begin{aligned} G &= p(A) \cdot \mu \\ &= \frac{1}{a(1-2a)} \begin{bmatrix} a^2 + 2a + 1/4 & a^2 + a \\ a+1 & a + 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{1-2a} \begin{bmatrix} a^3 + a^2 - 3a/4 \\ a^2 - 1/4 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{11}$$

Caso 2) $a = 0$.

In questo caso O è singolare e pertanto dobbiamo studiare se l'autovalore non osservabile della matrice A verifica le specifiche. Pertanto calcoliamo gli autovalori della matrice A nel caso in cui $a = 0$:

$$\lambda_1^A = -1; \lambda_2^A = -1.$$

Siccome entrambi gli autovalori di A non coincidono in $-1/2$ ed uno di essi è non osservabile, in questo caso le specifiche dell'esercizio non potranno essere soddisfatte.

Caso 3) $a = 1/2$.

Anche in questo caso O è singolare e pertanto dobbiamo studiare se l'autovalore non osservabile della matrice A è in $-1/2$. Innanzitutto occorre calcolare gli autovalori della matrice A nel caso in cui $a = 1/2$:

$$\lambda_1^A = -1/2; \quad \lambda_2^A = -2 \ .$$

Per individuare l'autovalore non osservabile possiamo studiare la forma canonica di osservabilità. La matrice di osservabilità O in questo caso è:

$$O = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix},$$

e dunque:

$$\mathcal{I} = \mathcal{N}(O) = span\left\{\left[\begin{array}{c} 1 \\ -2 \end{array}\right]\right\};$$

quindi, scegliendo un vettore $v = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array}\right]$ linearmente indipendente da $\left[\begin{array}{c} 1 \\ -2 \end{array}\right]$, otteniamo:

$$T^{-1} = \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{array}\right],$$

da cui:

$$T = \left[\begin{array}{cc} 1 & 1/2 \\ 0 & -1/2 \end{array}\right].$$

Possiamo a questo punto calcolare la forma canonica di osservabilità:

$$\left\{\begin{array}{l} d\tilde{x}/dt = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u \\ y = \tilde{C}\tilde{x}, \end{array}\right. \tag{12}$$

dove:

$$\begin{array}{l} \tilde{A} = TAT^{-1} = \left[\begin{array}{cc} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} -2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 \end{array}\right]; \\ \tilde{B} = TB = \left[\begin{array}{c} B_1 \\ B_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array}\right]; \\ \tilde{C} = CT^{-1} = \left[\begin{array}{cc} C_1 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \end{array}\right]. \end{array}$$

Infine, osservando la forma canonica di osservabilità, ci si accorge che l'autovalore non osservabile coincide con $-1/2$ che verifica direttamente le specifiche. Il sottosistema osservabile è:

$$\left\{\begin{array}{l} dx_1/dt = -2x_1 + u \\ y_1 = x_1, \end{array}\right. \tag{13}$$

e dunque, per questo sistema osservabile, possiamo costruire un osservatore asintotico

$$\left\{\begin{array}{l} d\xi_1/dt = A_{11}\xi_1 + B_1 u + G_1(y - C_1\xi_1), \\ \eta_1 = \xi_1, \end{array}\right. \tag{14}$$

che converga con una velocità pari $e^{-1/2t}$, imponendo:

$$A_{11} - G_1 C_1 = -1/2,$$

da cui, $G_1 = -3/2$. Sulla base dell'osservatore (14) relativo al sistema (13) è possibile trovare un osservatore relativo al sistema (12),

$$\left\{\begin{array}{l} d\tilde{\xi}/dt = \tilde{A}\tilde{\xi} + \tilde{B}u + \tilde{G}(y - \tilde{C}\tilde{\xi}), \\ \tilde{\eta} = \tilde{\xi}, \end{array}\right.$$

dove:

$$\tilde{G} = \left[\begin{array}{c} -3/2 \\ g \end{array}\right], g \in \mathbb{R}.$$

Tenendo conto del cambiamento di base possiamo derivare l'espressione dell'osservatore per il sistema (10). Infatti calcolando

$$G = T^{-1}\tilde{G} = \left[\begin{array}{r} -3/2 + g \\ -2g \end{array}\right], g \in \mathbb{R},$$

si ottiene il seguente osservatore che verifica le specifiche richieste:

$$\begin{cases} d\xi/dt = \begin{bmatrix} -3/2 & -1/2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \xi + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} -3/2+g \\ -2g \end{bmatrix} (y - \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \xi), \\ \eta = \xi. \end{cases}$$

Possiamo infine riassumere i risultati: l'esercizio ha soluzione se e solo se $a \neq 0$. Inoltre la matrice G relativa all'osservatore asintotico che verifica le specifiche è data da:

$$G = \begin{cases} \frac{1}{1-2a} \begin{bmatrix} a^3 + a^2 - 3a/4 \\ a^2 - 1/4 \end{bmatrix}, & a \neq 1/2, \\ \begin{bmatrix} -3/2+g \\ -2g \end{bmatrix}, g \in \mathbb{R}, & a = 1/2. \end{cases}$$

Esercizio 4 *Dato il sistema lineare tempo continuo:*

$$\begin{cases} dx/dt = Ax + Bu, x \in \mathbb{R}^2, u \in \mathbb{R}, \\ y = Cx, y \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{15}$$

dove:

$$A = \begin{bmatrix} a^2 - 4 & 1 \\ -a^2 + a + 7 & a + 2 \end{bmatrix};$$
$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} a+1 & a+1 \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R},$$

si determini il parametro a affinchè esista un osservatore asintotico il cui stato converga asintoticamente allo stato x del sistema (15) con velocità pari a quella di e^{-4t}.

Svolgimento - Calcoliamo innanzitutto la matrice di osservabilità:

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = (a+1) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a+3 & a+3 \end{bmatrix}.$$

Il rango della matrice O è uno per $a \neq -1$ (nel cui caso il rango è zero) e pertanto non è possibile costruire un osservatore arbitrariamente veloce. Per calcolare gli autovalori relativi alle dinamiche non osservabili e gli autovalori relativi alle dinamiche osservabili conviene calcolare la forma canonica di osservabilità. Pertanto il sottospazio di inosservabilità è dato da:

$$\mathcal{I} = \mathcal{N}(O) = span \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\},$$

da cui è possibile costruire la matrice di trasformazione T che porti il sistema (15) in forma canonica di osservabilità. Scegliendo ad esempio un vettore $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ si ottiene:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

da cui:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Sulla base di T possiamo costruire la forma canonica di osservabilità associata al sistema (15):

$$\begin{cases} d\tilde{x}/dt = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u \\ y = \tilde{C}\tilde{x}, \end{cases} \tag{16}$$

dove:

$$\tilde{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+3 & 0 \\ a^2 - a - 7 & a^2 - 5 \end{bmatrix};$$
$$\tilde{B} = TB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix};$$
$$\tilde{C} = CT^{-1} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+1 & 0 \end{bmatrix}.$$

L'autovalore relativo alla dinamica non osservabile è $\lambda_1 = a^2 - 5$ mentre l'altro autovalore della matrice $\tilde{A}$ è $\lambda_2 = a + 3$. Pertanto dobbiamo imporre:

$$\lambda_2 = -4 \Longleftrightarrow a = -1; a = 1.$$

Inoltre l'autovalore λ_1 è osservabile se e solo se $a \neq -1$. Inoltre per $a = -1$ si ha $\lambda_1 = 2$ e pertanto in questo caso la specifica non è soddisfatta.
Dunque il problema in esame ha soluzione se e solo se $a = 1$. In tal caso il sottosistema osservabile è:

$$\begin{cases} dx_1/dt = 4x_1 + u \\ y_1 = 2x_1, \end{cases} \tag{17}$$

e dunque, per questo sistema osservabile, possiamo costruire un osservatore asintotico

$$\begin{cases} d\xi_1/dt = A_{11}\xi_1 + B_1 u + G_1(y - C_1\xi_1), \\ \eta_1 = \xi_1, \end{cases} \tag{18}$$

che converga con una velocità pari e^{-4t}, oppure in modo del tutto equivalente,

$$A_{11} - G_1 C_1 = -4,$$

da cui, $G_1 = 4$. Sulla base dell'osservatore (18) relativo al sistema (17) è possibile trovare un osservatore relativo al sistema (16),

$$\begin{cases} d\tilde{\xi}/dt = \tilde{A}\tilde{\xi} + \tilde{B}u + \tilde{G}(y - \tilde{C}\tilde{\xi}), \\ \tilde{\eta} = \tilde{\xi}, \end{cases}$$

dove:

$$\tilde{G} = \begin{bmatrix} 4 \\ g \end{bmatrix}, g \in \mathbb{R}.$$

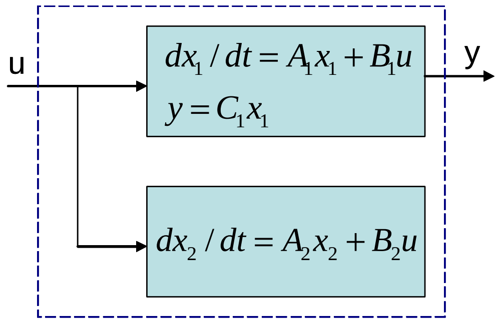
Tenendo conto del cambiamento di base possiamo derivare l'espressione dell'osservatore per il sistema (15). Infatti calcolando

$$G = T^{-1}\tilde{G} = \begin{bmatrix} 4+g \\ -g \end{bmatrix}, g \in \mathbb{R},$$

si ottiene il seguente osservatore che verifica le specifiche richieste:

$$\begin{cases} d\xi/dt = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}\xi + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}u + \begin{bmatrix} 4+g \\ -g \end{bmatrix}(y - \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix}\xi), \xi \in \mathbb{R}^2, \\ \eta = \xi, \eta \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Esercizio 5 *Dato il seguente schema di controllo:*



dove:

$$A_1 = \begin{bmatrix} a+3 & 0 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 2a-1 & a+1 \\ 0 & a^2+5a+1 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} a-2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} a-2 & a+2 \end{bmatrix},$$

Si chiede di:

(i) *determinare tutti i valori di a affinchè esista un osservatore asintotico dello stato la cui uscita ξ converga allo stato x con velocità di convergenza pari a quella di e^{-5t};*

(ii) *calcolare l'espressione di tale osservatore.*

Svolgimento - L'interconnessione del processo in figura ha come rappresentazione con lo spazio di stato:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} dx_1/dt \\ dx_2/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u \\ y_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \end{cases} \tag{19}$$

Dall'analisi del sistema (19) ci si accorge che gli autovalori relativi alla matrice dinamica A_2 sono non osservabili e pertanto bisogna imporre che gli autovalori di A_2:

$$\lambda_{1,2} = 2a - 1$$
$$\lambda_{2,2} = a^2 + 5a + 1,$$

coincidano in -5. Pertanto:

$$\lambda_{1,2} = -5 \Longleftrightarrow a = -2;$$
$$\lambda_{2,2} = -5 \Longleftrightarrow a = -2, a = -3.$$

Da questa analisi preliminare il valore ammissibile di a per cui contemporaneamente $\lambda_{1,2} = -5$ e $\lambda_{2,2} = -5$ è dato da:

$$a = -2. \tag{20}$$

Inoltre andando a studiare il sottosistema di variabile di stato x_1, in $a = -2$,

$$\begin{cases} dx_1/dt = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} u, \\ y_1 = \begin{bmatrix} -4 & 0 \end{bmatrix} x_1, \end{cases} \tag{21}$$

ci si accorge che c'è un autovalore non osservabile in $\lambda_{2,1} = -5$ che verifica direttamente la specifica ed un autovalore osservabile in $\lambda_{1,1} = 1$. Pertanto per il sottosistema osservabile (con autovalore $\lambda_{1,1} = 1$), possiamo costruire un osservatore asintotico:

$$\begin{cases} d\xi_1/dt = A_{11}\xi_1 + B_1 u + G_1(y - C_1\xi_1), \\ \eta_1 = \xi_1, \end{cases}$$

che converga con una velocità pari e^{-5t}, imponendo:

$$A_{11} - G_{1,1}C_1 = -5,$$

da cui, $G_{1,1} = -3/2$. Dunque un osservatore che verifichi le specifiche richieste per il sistema (21) è dato da:

$$\begin{cases} d\xi_1/dt = A_1\xi_1 + B_1 u + G_1(y - C_1\xi), \\ \eta_1 = \xi_1, \end{cases}$$

dove:

$$G_1 = \begin{bmatrix} -3/2 \\ g_1 \end{bmatrix}, g_1 \in \mathbb{R}.$$

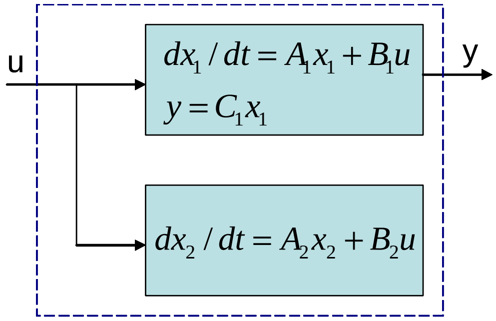
Dunque esiste un osservatore asintotico dello stato la cui uscita ξ converga allo stato x con velocità di convergenza pari a quella di e^{-5t} se e solo se $a = -2$.
Infine un osservatore che verifichi le specifiche di cui al punto (i) è dato da:

$$\begin{cases} d\xi/dt = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \xi + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u + G(y - \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} \xi), \\ \eta = \xi, \end{cases}$$

con:

$$G = \begin{bmatrix} -3/2 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix}, g_1, g_2, g_3 \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 6 (Homework con soluzione) *Dato il seguente schema di controllo:*



dove:

$$A_1 = \begin{bmatrix} a+7 & 0 \\ 2 & a-b+2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = a+b,$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} a-2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad B_2 = a-b,$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} a-2 & a+b+3 \end{bmatrix},$$

Si chiede di:

(i) *determinare tutti i valori di a affinchè esista un osservatore asintotico dello stato la cui uscita ξ converga allo stato x con velocità di convergenza pari a quella di e^{-3t};*

(ii) *calcolare l'espressione di tale osservatore.*

Svolgimento - L'interconnessione del processo in figura ha come rappresentazione con lo spazio di stato:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} dx_1/dt \\ dx_2/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u, \\ y_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \end{cases} \tag{22}$$

Dall'analisi del sistema (22) ci si accorge che l'autovalore relativo alla matrice dinamica A_2 è non osservabile e pertanto bisogna imporre che tale autovalore:

$$\lambda_2 = a+b,$$

coincida in -3. Pertanto:

$$\lambda_2 = -3 \Longleftrightarrow a = -b-3.$$

Inoltre studiando il sottosistema con variabile di stato x_1 in $a = -b-3$,

$$\begin{cases} dx_1/dt = \begin{bmatrix} -b+4 & 0 \\ 2 & -2b-1 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} -b-5 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y_1 = \begin{bmatrix} -b-5 & 0 \end{bmatrix} x_1. \end{cases} \tag{23}$$

ci si accorge che c'è un autovalore non osservabile in $\lambda_{2,1} = -2b-1$ che verifica la specifica se e solo se $b = 1$; da ciò si ottiene:

$$a = -4.$$

Sostituendo tale valore del parametro a nel sistema (23), si ottiene:

$$\begin{cases} dx_1/dt = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y_1 = \begin{bmatrix} -6 & 0 \end{bmatrix} x_1. \end{cases}$$

Il sottosistema osservabile associato al sistema di sopra riportato è dato da:

$$\begin{cases} dx_{1,1}/dt = 3x_{1,1} - 6u \\ y_1 = -6x_{1,1}, \end{cases}$$

da cui, evidentemente

$$3 - g(-6) = -3 \Leftrightarrow g = -1.$$

Dunque un osservatore che verifichi le specifiche richieste per il sistema (23) è dato da:

$$\begin{cases} d\xi_1/dt = A_1\xi_1 + B_1u + G_1(y - C_1\xi_1), \\ \eta_1 = \xi_1, \end{cases}$$

con:

$$G_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ g_1 \end{bmatrix}, g_1 \in \mathbb{R}.$$

Infine un osservatore che verifichi le specifiche di cui al punto (i) è dato da:

$$\begin{cases} d\xi/dt = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \xi + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u + G(y - \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} \xi), \\ \eta = \xi, \end{cases}$$

con:

$$G = \begin{bmatrix} -1 \\ g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}, g_1, g_2 \in \mathbb{R}.$$