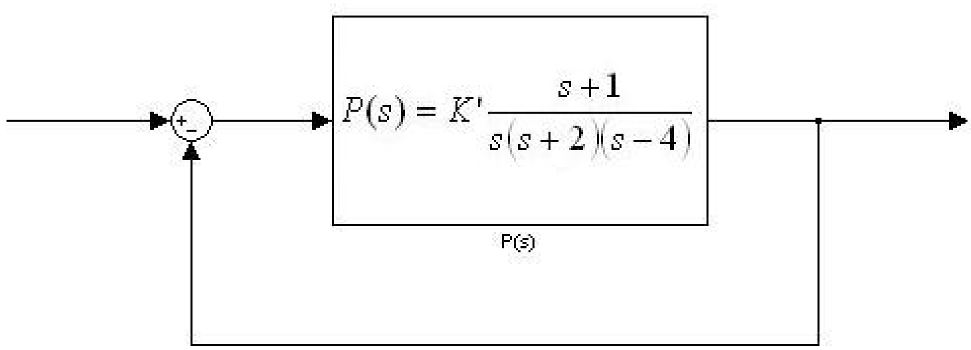
Corso di Controlli Automatici
Proff. M. D. Di Benedetto e S. Di Gennaro

Esercitazione del 14/5/2009

Ing. Alessandro Borri
alessandro.borri@univaq.it

Sintesi mediante luogo delle radici - Esercizio 1

Stabilizzare asintoticamente il seguente sistema a ciclo chiuso, mediante l'utilizzo del luogo delle radici



La funzione di trasferimento del sistema (instabile) sul ramo diretto è

$$P(s) = \frac{N_P(s)}{D_P(s)} = K' \frac{s+1}{s\ (s+2)\ (s-4)}$$

Osservazioni preliminari

$$\begin{aligned} n &= 3,\, m = 1 \Rightarrow n - m = 2 \\ z_1 &= -1 \Longrightarrow \text{sistema a fase minima} \\ p_1 &= 0,\, p_2 = -2,\, p_3 = 4 \end{aligned}$$

Il centro degli asintoti è

$$s_o = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i}{(n-m)} = \frac{-2+4+1}{2} = \frac{3}{2}$$

La funzione di trasferimento del sistema ad anello chiuso (retroazione unitaria) è

$$W(s) = \frac{N_W(s)}{D_W(s)} = \frac{N_P(s)}{N_P(s) + D_P(s)} = \frac{K'\,(s+1)}{K'\,(s+1) + s\,\,(s+2)\,\,(s-4)}$$

Il luogo delle radici è descritto dall'equazione

$$D_W(s) = K'\,(s+1) + s(s+2)(s-4) = s^3 - 2s^2 + (K'-8)\,s + K'$$

al variare di $K' \in \mathbb{R}$.

Osservazione C'è almeno una variazione di segno e quindi almeno una radice positiva. Quindi il sistema a ciclo chiuso è instabile per ogni K' (coerentemente con il fatto che $s_0 > 0$).

Punti singolari

$$\begin{cases} s^3 - 2s^2 + (K'-8)\,s + K' = 0 \\ 3s^2 - 4s + K' - 8 = 0 \end{cases}$$

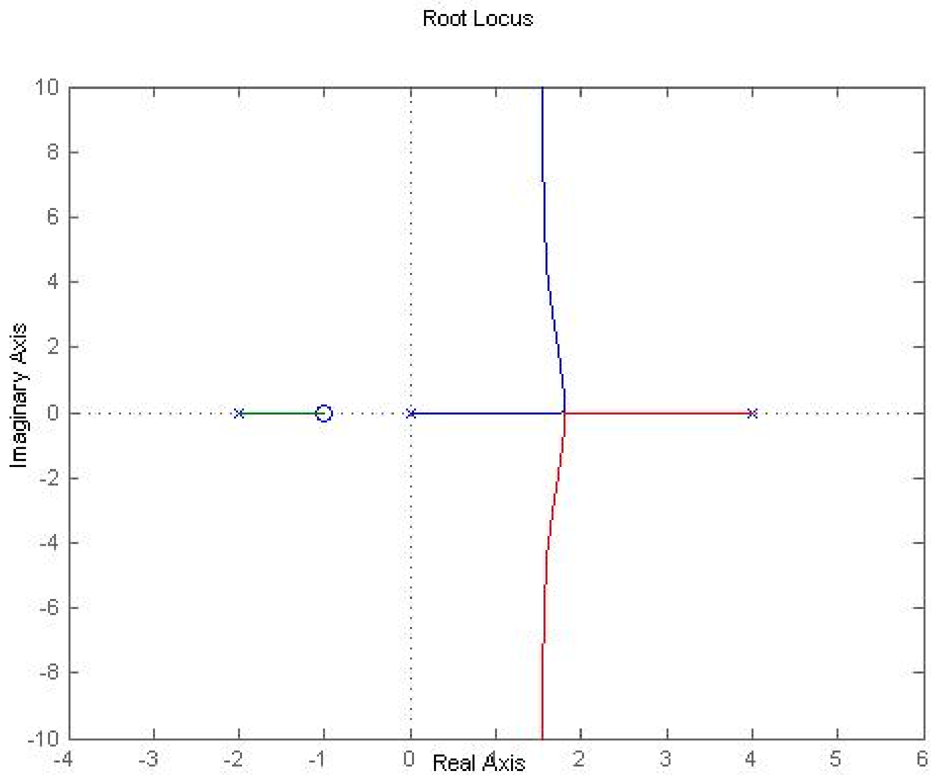
Il sistema ha 3 soluzioni, ma 2 non sono valide perchè corrispondenti a valori non reali di K'

$$\begin{aligned} s &= 1.82 && \text{con } K' = 5.37 \\ s &= -1.16 - j0.93 && \text{con } K' = 1.94 - j10.16 \\ s &= -1.16 + j0.93 && \text{con } K' = 1.94 + j10.16 \end{aligned}$$

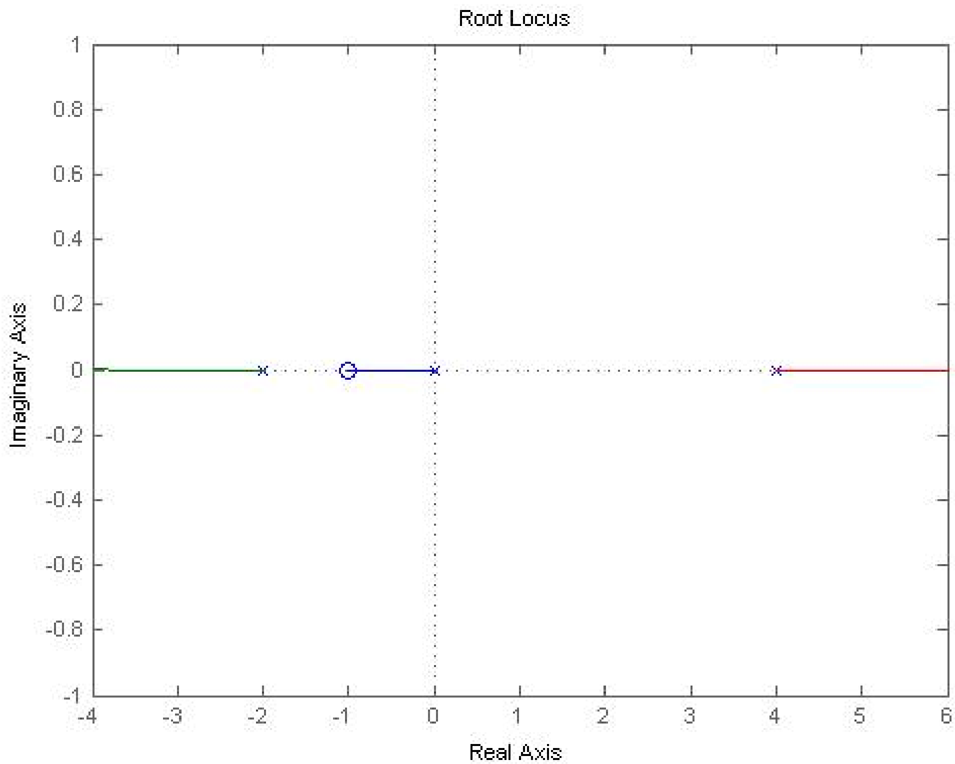
L'unico punto singolare è quindi

$$s = 1.82 \quad \text{con } K' = 5.37$$

In base a quanto detto finora, il luogo delle radici si presenta così



Luogo positivo



Luogo negativo

Stabilizzazione Si aggiunge una coppia polo-zero per spostare s_0 a sinistra dell'asse immaginario

$$G(s) = \frac{s+z}{s+p}$$

Si può scegliere $z = 2$ in modo da cancellare un polo stabile in $P(s)$; inoltre si può imporre il nuovo centro degli asintoti in $-\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{s+z}{s+p} = \frac{s+2}{s+p} \\ s_0' &= s_0 - \frac{p-z}{2} = \frac{3}{2} - \frac{p-2}{2} = -\frac{1}{2} \Longrightarrow p = 6 \end{aligned}$$

La funzione di trasferimento sul ramo diretto ora è

$$F'(s) = G(s)P(s) = \frac{s+2}{s+6}\frac{K'\,(s+1)}{s\ (s+2)\ (s-4)} = K'\frac{(s+1)}{s\ (s-4)\,(s+6)}$$

La nuova funzione di trasferimento a ciclo chiuso è

$$W(s) = \frac{N_W(s)}{D_W(s)} = \frac{N_{F'}(s)}{N_{F'}(s) + D_{F'}(s)} = \frac{K'\,(s+1)}{K'\,(s+1) + s\ (s-4)\,(s+6)}$$

Il luogo delle radici è ora descritto dall'equazione

$$K'\,(s+1) + s(s-4)\,(s+6) = s^3 + 2s^2 + (K'-24)\,s + K'$$

al variare di $K' \in \mathbb{R}$.

Condizione necessaria per l'asintotica stabilità a ciclo chiuso è

$$K' > 24.$$

Per avere una condizione necessaria e sufficiente, si applica il criterio di Routh:

$$\begin{array}{|c|lcl}
3 & 1 & & K'-24 \\
2 & 2 & & K' \\
1 & \frac{2(K'-24)-K'}{2} & = \frac{K'-48'}{2} & 0 \\
0 & K' & & 0
\end{array}$$

Si ha stabilità asintotica a ciclo chiuso se e solo se

$$K' > 48.$$

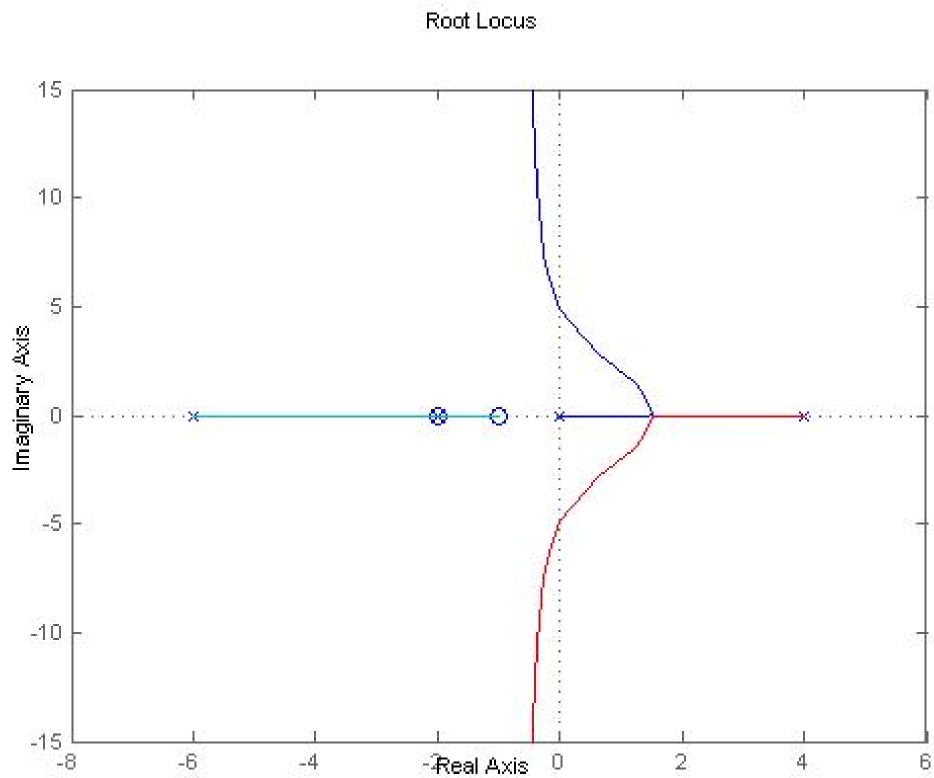
Annullando la penultima riga della tabella di Routh ($K' = 48$), si ottengono gli attraversamenti dell'asse immaginario risolvendo l'equazione

$$2s^2 + 48 = 0$$

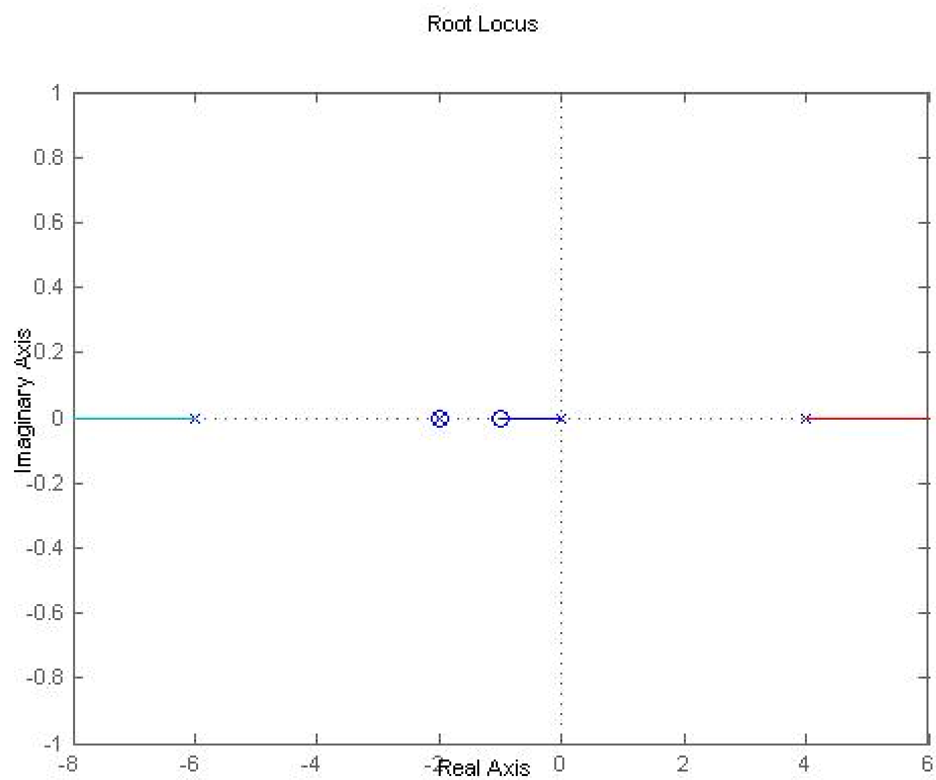
Gli attraversamenti si hanno per

$$s = \pm j4.9$$

Il nuovo luogo delle radici è il seguente



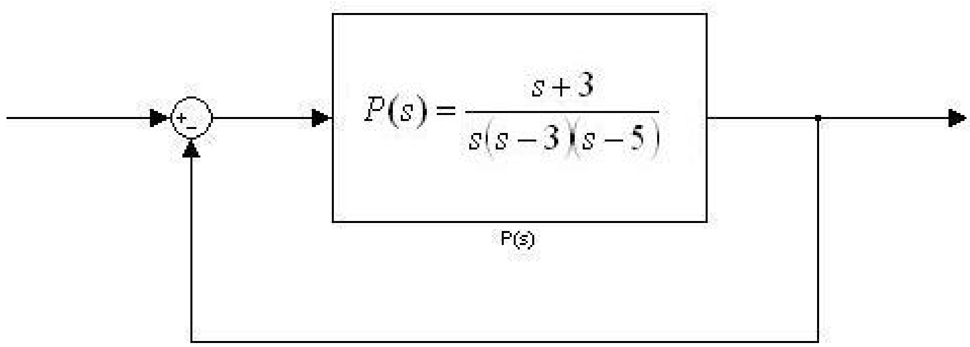
Luogo positivo dopo la compensazione



Luogo negativo dopo la compensazione

Sintesi mediante luogo delle radici - Esercizio 2

Stabilizzare asintoticamente il seguente sistema a ciclo chiuso, mediante l'utilizzo del luogo delle radici



La funzione di trasferimento del sistema (instabile) sul ramo diretto è

$$P(s) = \frac{N_P(s)}{D_P(s)} = \frac{s+3}{s\ (s-3)\ (s-5)}$$

Osservazioni preliminari

$$\begin{aligned} n &= 3,\ m = 1 \Rightarrow n - m = 2 \\ z_1 &= -3 \Longrightarrow \text{sistema a fase minima} \\ p_1 &= 0,\ p_2 = 3,\ p_3 = 5 \end{aligned}$$

Il centro degli asintoti è

$$s_o = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i}{(n-m)} = \frac{3+5+3}{2} = \frac{11}{2}$$

La funzione di trasferimento del sistema ad anello chiuso (retroazione unitaria), aggiungendo un guadagno $G(s) = K'$ sul ramo diretto, è

$$W(s) = \frac{N_W(s)}{D_W(s)} = \frac{N_{F'}(s)}{N_{F'}(s) + D_{F'}(s)} = \frac{K'\ (s+3)}{K'\ (s+3) + s\ (s-3)\ (s-5)}$$

con $F'(s) = G(s)P(s)$.

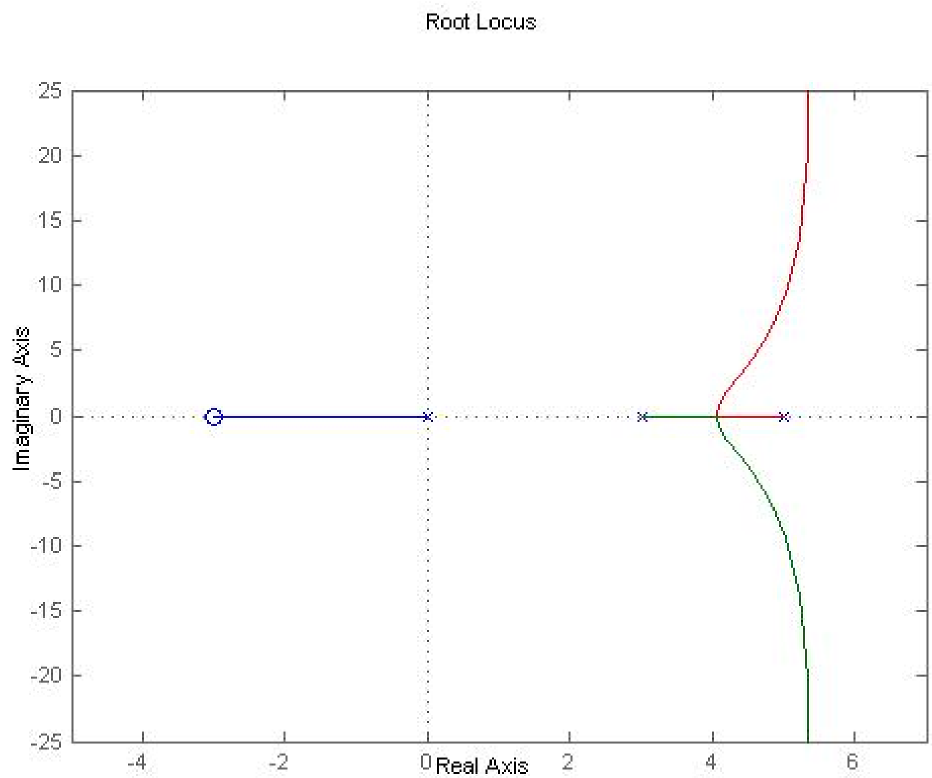
Il luogo delle radici è descritto dall'equazione

$$D_W(s) = K'\ (s+3) + s\ (s-3)\ (s-5) = s^3 - 8s^2 + (K'+15)\, s + 3K'$$

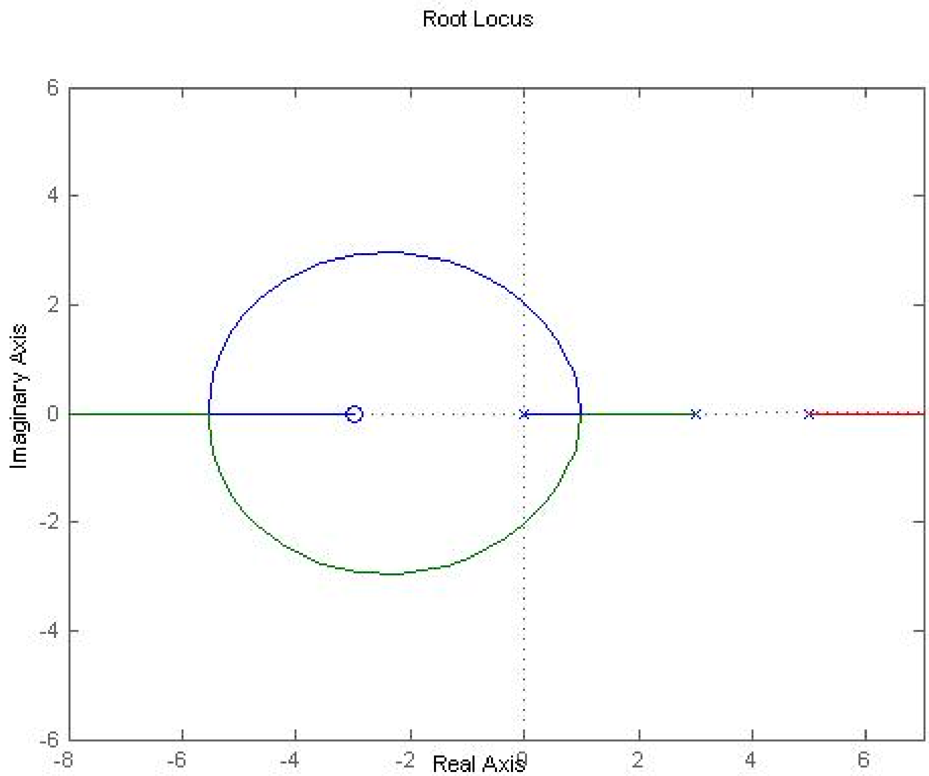
al variare di $K' \in \mathbb{R}$.

Osservazione C'è almeno una variazione di segno e quindi almeno una radice positiva. Quindi il sistema a ciclo chiuso è instabile per ogni K' (coerentemente con il fatto che $s_0 > 0$). Di conseguenza non è sufficiente l'inserimento di un controllore statico $G(s) = K'$, ma bisogna ricorrere a qualcosa di più complesso.

In base a quanto detto finora, il luogo delle radici si presenta così



Luogo positivo



Luogo negativo

Stabilizzazione Si aggiunge una coppia polo-zero per spostare s_0 a sinistra dell'asse immaginario

$$G(s) = K' \frac{s+z}{s+p}$$

Non ci sono poli stabili (e quindi cancellabili) in $P(s)$; si può imporre il nuovo centro degli asintoti in -1

$$\begin{aligned} G(s) &= K' \frac{s+z}{s+p} \\ s_0' &= s_0 - \frac{p-z}{2} = \frac{11}{2} - \frac{p-z}{2} = -1 \Longrightarrow p - z = 13 \end{aligned}$$

Scelgo, ad esempio

$$z = 2,\, p = 15$$

La funzione di trasferimento sul ramo diretto ora è

$$F'(s) = G(s)P(s) = K' \frac{s+2}{s+15} \frac{(s+3)}{s\,(s-3)\,(s-5)} = K' \frac{(s+2)\,(s+3)}{s\,(s-3)\,(s-5)\,(s+15)}$$

La nuova funzione di trasferimento a ciclo chiuso è

$$W(s) = \frac{N_W(s)}{D_W(s)} = \frac{N_{F'}(s)}{N_{F'}(s) + D_{F'}(s)} = \frac{K'\,(s+2)\,(s+3)}{K'\,(s+2)\,(s+3) + s\,(s-3)\,(s-5)\,(s+15)}$$

Il luogo delle radici è ora descritto dall'equazione

$$K'\,(s+2)\,(s+3) + s\,(s-3)\,(s-5)\,(s+15) = s^4 + 7s^3 + (K' - 105)\,s^2 + (5K' + 225)\,s + 6K'$$

al variare di $K' \in \mathbb{R}$.

Condizione necessaria per l'asintotica stabilità a ciclo chiuso è

$$K' > 105.$$

Per avere una condizione necessaria e sufficiente, si applica il criterio di Routh:

$$\begin{array}{|c|lll}
4 & 1 & K' - 105 & 6K' \\
3 & 7 & 5K' + 225 & 0 \\
2 & \frac{7(K'-105)-5K'-225}{7} = \frac{2K'-960}{7} & 6K' & 0 \\
1 & \frac{5(K')^2-2322K'-108\,000}{(K'-480)} & 0 & \\
0 & 6K' & 0 &
\end{array}$$

Si ha stabilità asintotica a ciclo chiuso se e solo se

$$K' > 480 \text{ e } 5(K')^2 - 2322K' - 108\,000 > 0$$

Mettendo a sistema le soluzioni, si ha

$$K' > 507$$

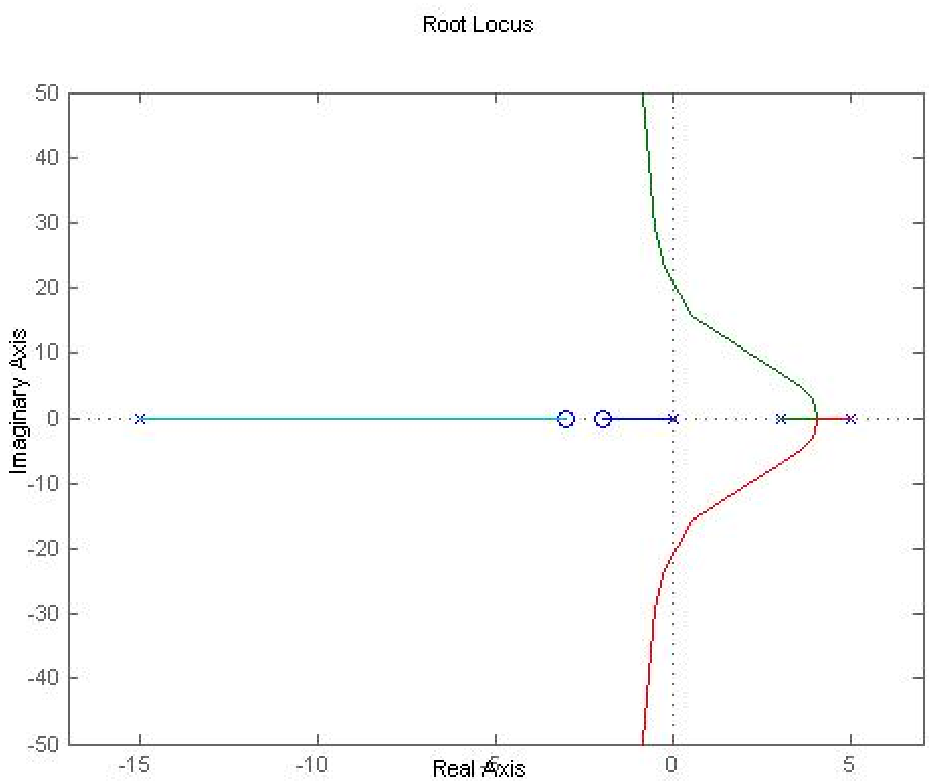
Annullando la penultima riga della tabella di Routh ($K' = 507$), si ottengono gli attraversamenti dell'asse immaginario risolvendo l'equazione

$$\frac{2 * 507 - 960}{7} s^2 + 6 * 507 = 0$$

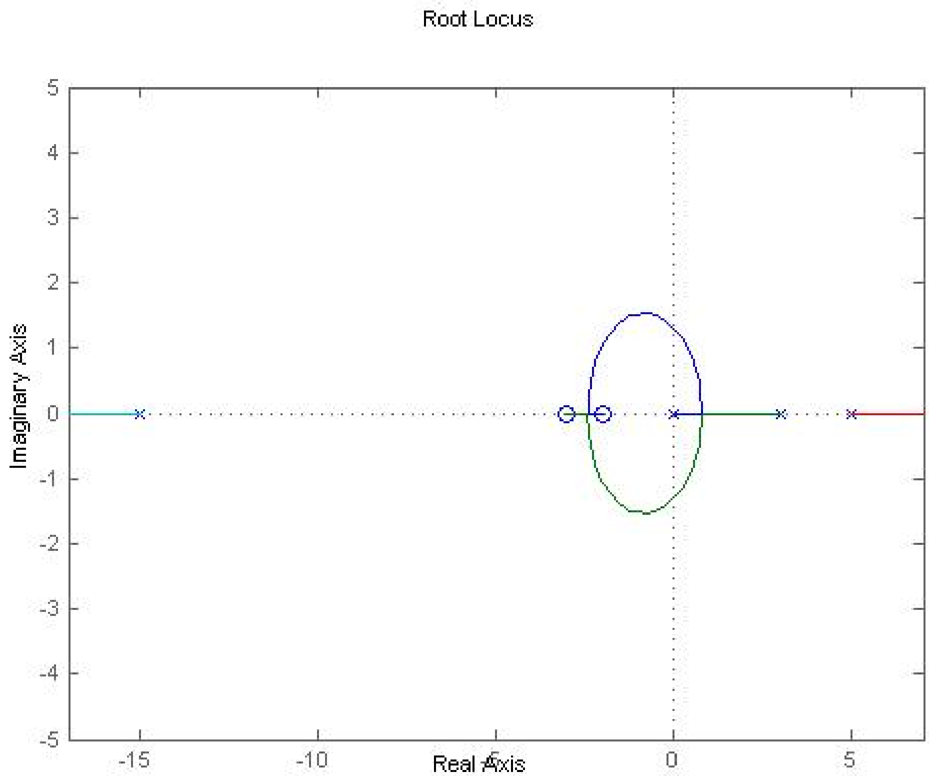
Gli attraversamenti si hanno per

$$s = \pm j19.86$$

Il nuovo luogo delle radici è il seguente



Luogo positivo dopo la compensazione



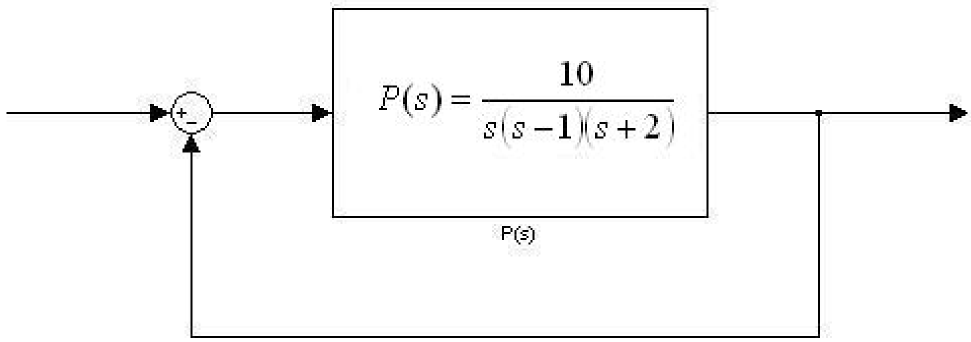
Luogo negativo dopo la compensazione

Si può dunque scegliere $K' = 510 > 507$ e giungere così alla forma definitiva del controllore stabilizzante

$$G(s) = 510\ \frac{s+2}{s+15}$$

Sintesi mediante luogo delle radici - Esercizio 3

Stabilizzare asintoticamente il seguente sistema a ciclo chiuso, mediante l'utilizzo del luogo delle radici



La funzione di trasferimento del sistema (instabile) sul ramo diretto è

$$P(s) = \frac{N_P(s)}{D_P(s)} = \frac{10}{s\ (s-1)\ (s+2)}$$

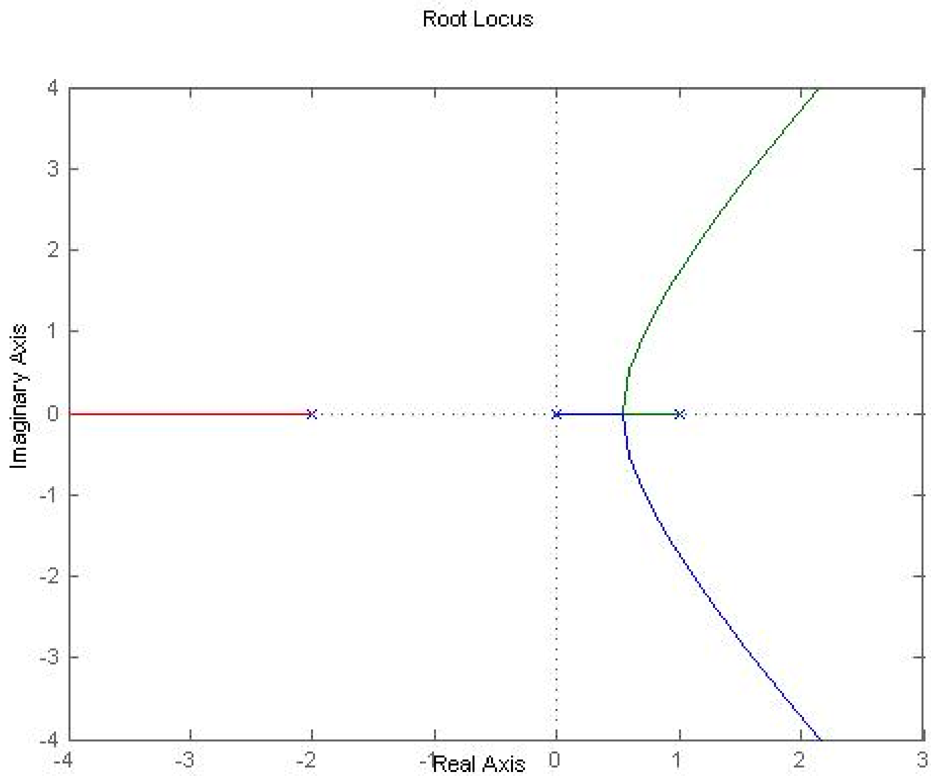
Osservazioni preliminari

$$\begin{aligned} n &= 3,\ m = 0 \Rightarrow n - m = 3 \\ \text{Non ci sono zeri} &\Longrightarrow \text{sistema a fase minima} \\ p_1 &= 0,\ p_2 = 1,\ p_3 = -2 \end{aligned}$$

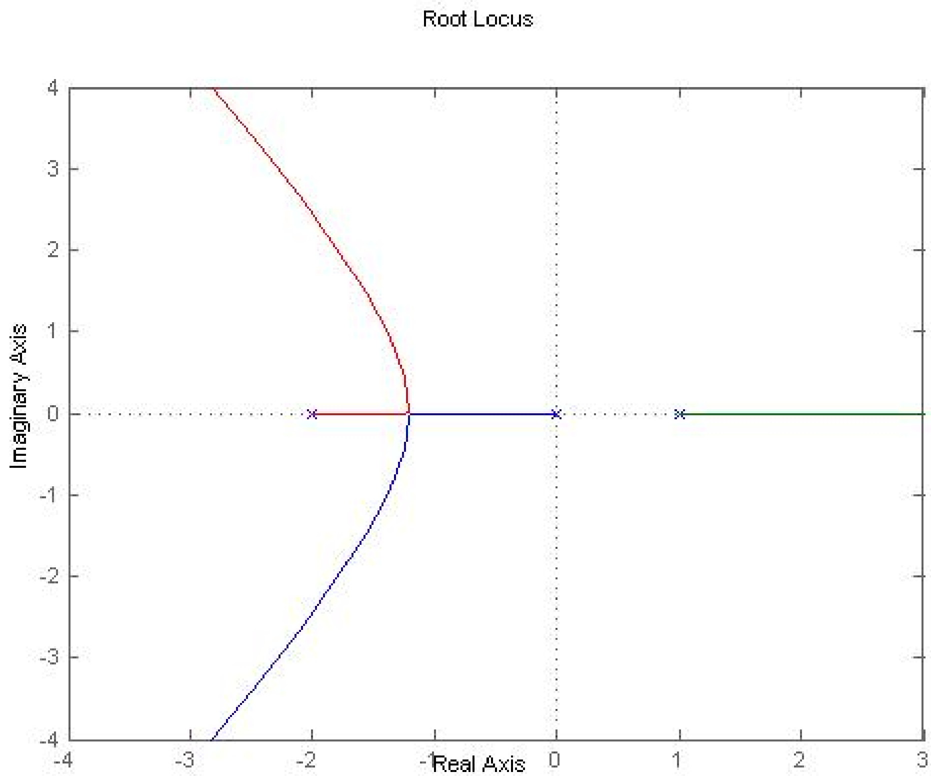
Il centro degli asintoti è

$$s_o = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i}{(n-m)} = \frac{0+1-2}{3} = -\frac{1}{3}$$

Il luogo delle radici, ottenuto aggiungendo un guadagno $G(s) = \frac{K'}{10}$ sul ramo diretto, è



Luogo positivo



Luogo negativo

Stabilizzazione E' necessario “raddrizzare” gli asintoti aggiungendo uno zero e mantenendo il centro degli asintoti negativo; bisogna evitare di creare rami nel semipiano destro del piano complesso (non vanno introdotti zeri positivi).

Si avrà

$$G(s) = \frac{K'}{10}(s+z)$$

Si può imporre il nuovo centro degli asintoti in $-\frac{1}{4}$

$$s_0' = \frac{0+1-2+z}{2} = \frac{z-1}{2} = -\frac{1}{4} \Longrightarrow z = \frac{1}{2}$$

La funzione di trasferimento del sistema ad anello chiuso (retroazione unitaria) è

$$W(s) = \frac{N_W(s)}{D_W(s)} = \frac{N_{F'}(s)}{N_{F'}(s) + D_{F'}(s)} = \frac{K'\left(s+\frac{1}{2}\right)}{K'\left(s+\frac{1}{2}\right) + s\,(s-1)\,(s+2)}$$

con $F'(s) = G(s)P(s)$.

Il luogo delle radici è descritto dall'equazione

$$D_W(s) = K'\left(s+\frac{1}{2}\right) + s\,(s-1)\,(s+2) = s^3 + s^2 + (K'-2)\,s + \frac{K'}{2}$$

al variare di $K' \in \mathbb{R}$.

Condizione necessaria per l'asintotica stabilità a ciclo chiuso è

$$K' > 2.$$

Per avere una condizione necessaria e sufficiente, si applica il criterio di Routh:

$$\begin{array}{|c|ll}
3 & 1 & K'-2 \\
2 & 1 & \frac{K'}{2} \\
1 & \frac{K'}{2}-2 & 0 \\
0 & \frac{K'}{2} & 0
\end{array}$$

Si ha stabilità asintotica a ciclo chiuso se e solo se

$$K' > 4$$

Osservazione Il controllore otttenuto finora

$$G(s) = K'\,\frac{\left(s+\frac{1}{2}\right)}{10} = K'\frac{2s+1}{20} \qquad \text{con } K' > 4$$

è irrealizzabile, perchè improprio. Si sfrutta allora il teorema seguente

Teorema *Sia dato un sistema a retroazione unitaria con funzione di trasferimento $F'(s) = G(s)P(s)$ sul ramo diretto. Se il sistema ad anello chiuso è asintoticamente stabile e se si aggiunge a $G(s)$ un termine ("polo lontano") della forma*

$$\frac{1}{1+\tau s} = \frac{\frac{1}{\tau}}{\left(s+\frac{1}{\tau}\right)}$$

allora esiste un $\bar{\tau} > 0$ sufficientemente piccolo tale che, se $0 < \tau < \bar{\tau}$, il sistema complessivo rimane asintoticamente stabile.

Per la determinazione di $\bar{\tau}$ (che dipende da K'), fisso $K' = 10 > 4$ ed applico il criterio di Routh.

Si ha

$$F'(s) = G(s)P(s) = \frac{s+\frac{1}{2}}{1+\tau s}\frac{10}{s\,(s-1)\,(s+2)} = 10\frac{s+\frac{1}{2}}{s\,(s-1)\,(s+2)\,(1+\tau s)}$$

La funzione di trasferimento del sistema ad anello chiuso è

$$W(s) = \frac{N_W(s)}{D_W(s)} = \frac{N_{F'}(s)}{N_{F'}(s)+D_{F'}(s)} = \frac{10\left(s+\frac{1}{2}\right)}{10\left(s+\frac{1}{2}\right)+s\,(s-1)\,(s+2)\,(1+\tau s)}$$

I poli della funzione di trasferimento a ciclo chiuso sono le soluzioni dall'equazione

$$D_W(s) = 10\left(s+\frac{1}{2}\right)+s\,(s-1)\,(s+2)\,(1+\tau s) = \tau s^4+(\tau+1)\,s^3+(1-2\tau)\,s^2+8s+5$$

al variare di $\tau \in \mathbb{R}$.

Condizione necessaria per l'asintotica stabilità a ciclo chiuso è

$$0 < \tau < \frac{1}{2}.$$

Per avere una condizione necessaria e sufficiente, si applica il criterio di Routh:

$$\begin{array}{|c|llll}
4 & \tau & 1-2\tau & 5 \\
3 & \tau+1 & 8 & 0 \\
2 & \frac{-2\tau^2-9\tau+1}{\tau+1} & 5 & \\
1 & \frac{-21\tau^2-82\tau+3}{-2\tau^2-9\tau+1} & 0 & \\
0 & 5 & &
\end{array}$$

Si ha stabilità asintotica a ciclo chiuso se e solo se

$$\begin{cases} \tau > 0 \\ -2\tau^2-9\tau+1 > 0 \\ -21\tau^2-82\tau+3 > 0 \end{cases} \Longrightarrow 0 < \tau < 0.036 = \bar{\tau}$$

Si può scegliere $\tau = 0.02 = \frac{1}{50} \Longrightarrow \frac{1}{\tau} = 50$.

Suggerimento La soluzione del sistema di disequazioni derivante dalla tabella di Routh può talvolta non essere immediata. Allora si può procedere "per tentativi", scegliendo τ sempre più piccolo, e verificare se gli elementi della prima colonna della tabella di Routh sono tutti dello stesso segno. Una possibilità è scegliere, al passo k del procedimento, $\tau = 10^{-k}$. Il teorema enunciato in precedenza assicura che il procedimento ha sempre successo dopo un numero finito di passi.

Si è giunti così alla forma definitiva del controllore stabilizzante

$$G(s) = 50\frac{\left(s + \frac{1}{2}\right)}{(s + 50)}$$

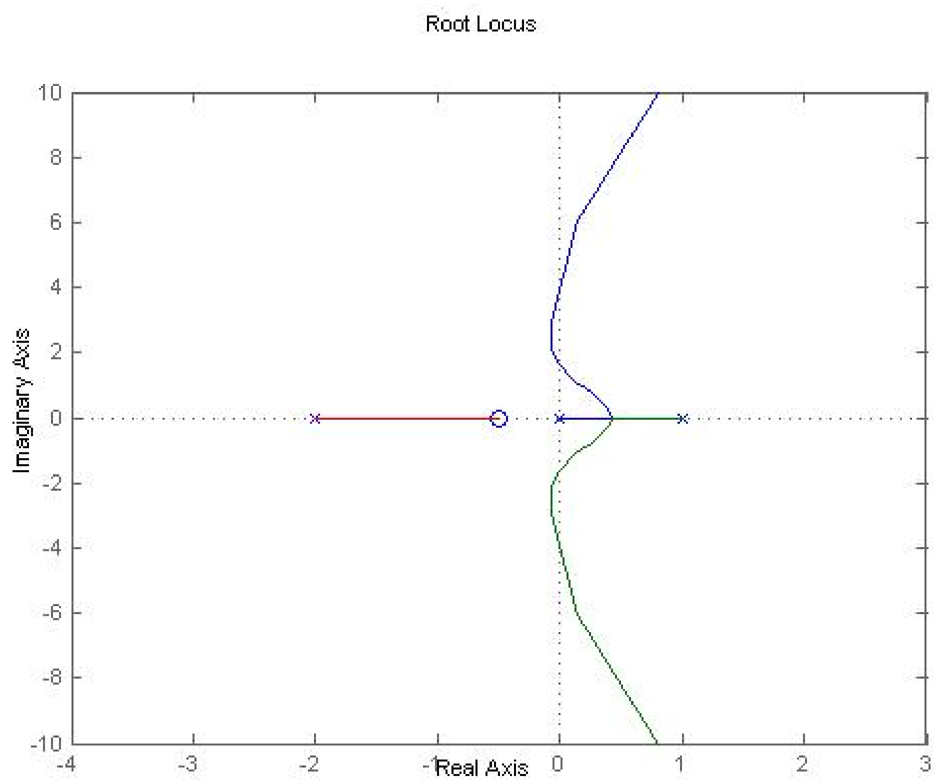
Il processo sul ramo diretto ha funzione di trasferimento pari a

$$F'(s) = G(s)P(s) = 50\frac{\left(s + \frac{1}{2}\right)}{(s + 50)}\frac{10}{s\ (s-1)\ (s+2)} = 500\frac{s + \frac{1}{2}}{s\ (s-1)\ (s+2)\,(s+50)}$$

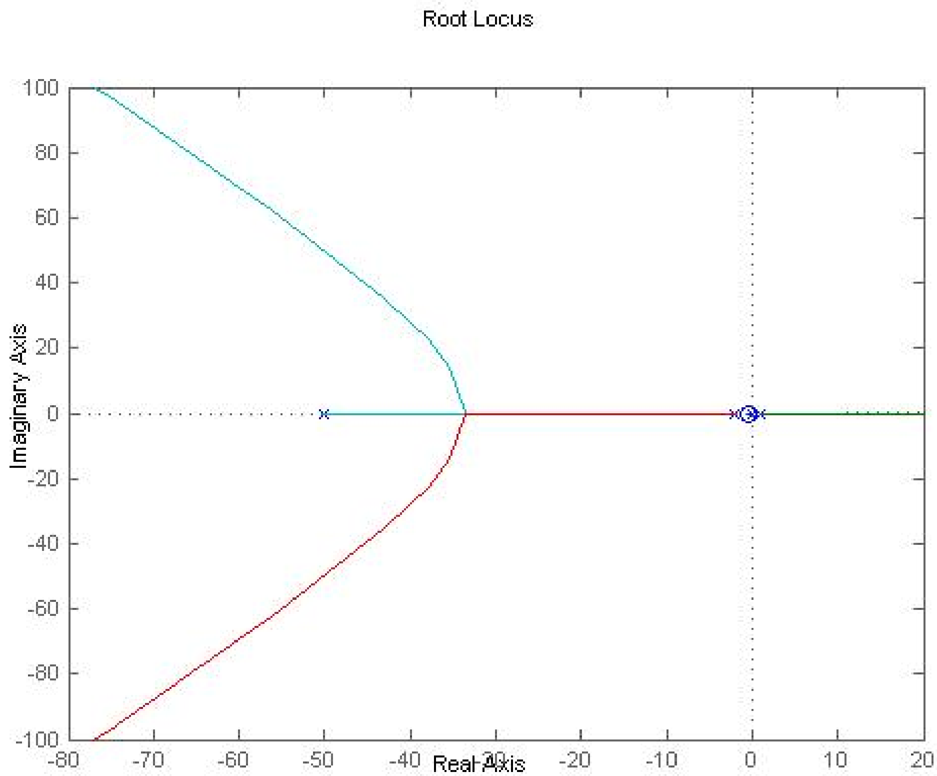
Il nuovo centro degli asintoti è

$$s_0' = \frac{0 + 1 - 2 - 50 + \frac{1}{2}}{3} = -\frac{101}{6} \simeq -16.83$$

Il nuovo luogo delle radici, aggiungendo un ulteriore fattore $\frac{K'}{500}$ sul ramo diretto, si presenterebbe così



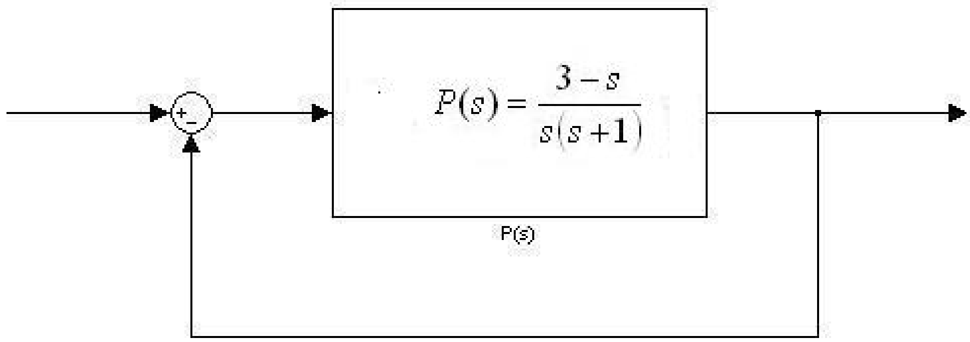
Luogo positivo dopo la compensazione



Luogo negativo dopo la compensazione

Esercizi proposti (homework)

1. Stabilizzare asintoticamente il seguente sistema a ciclo chiuso, mediante l'utilizzo del luogo delle radici



2. Stabilizzare asintoticamente il seguente sistema a ciclo chiuso, mediante l'utilizzo del luogo delle radici