Corso di Controlli Automatici
Proff. M. D. Di Benedetto e S. Di Gennaro

Esercitazione del 12/5/2011

Ing. Alessandro Borri, Prof. Giordano Pola
{alessandro.borri,giordano.pola}@univaq.it

1 Stabilizzabilità dei sistemi lineari

Il problema della stabilizzabilità (risp. stabilizzabilità asintotica) dei sistemi lineari consiste nella progettazione di un controllore lineare e statico con retroazione dallo stato che renda il sistema controllato, stabile (risp. asintoticamente stabile).
Più formalmente, dato un sistema lineare tempo continuo:

$$dx/dt = Ax + Bu, x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m \tag{1}$$

vogliamo studiare delle condizioni affinché, mediante una retroazione lineare e statica dallo stato della forma $u = Kx$, il processo controllato:

$$dx/dt = (A + BK)x \tag{2}$$

sia stabile (risp. asintoticamente stabile).
Se il sistema (1) è controllabile allora è evidentemente sia stabilizzabile che stabilizzabile asintoticamente. Supponiamo dunque che il sistema (1) non sia controllabile e che il rango della matrice di raggiungibilità associata al sistema (1) sia $r < n$.
Applicando una opportuna trasformazione di coordinate $\tilde{x} = Tx$ nello spazio di stato $\mathbb{R}^n$, è possibile riscrivere il sistema (1) in forma canonica di raggiungibilità:

$$d\tilde{x}/dt = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u, \tag{3}$$

dove:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$A_{11} \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{r \times m}$ e la coppia (A_{11}, B_1) è raggiungibile o, in modo equivalente il sistema lineare:

$$dx_1/dt = A_{11}x_1 + B_1u, \tag{4}$$

è raggiungibile. Dunque il sistema (4) verifica le ipotesi del Teorema dell'assegnazione degli autovalori con retroazione statica dallo stato e pertanto il seguente risultato è immediato:

Teorema *Il sistema (1) è stabilizzabile (risp. asintoticamente stabilizzabile) se e solo se la matrice A_{22} è stabile (risp. asintoticamente stabile).*

Ricordiamo che una matrice quadrata di dimensione n è *stabile* se ha $n - 1$ autovalori a parte reale strettamente negativa ed uno a parte reale non positiva, mentre la stessa matrice è *asintoticamente stabile* se tutti gli autovalori sono a parte reale strettamente negativa.

Per verificare le ipotesi del teorema precedente si può utilizzare il PBH test. Supponiamo dunque che le ipotesi del risultato precedente siano verificate e sintetizziamo un controllore che stabilizzi (risp. stabilizzi asintoticamente) il sistema (1). Per fare ciò, utilizziamo il Teorema sull'assegnazione degli autovalori con retroazione statica dallo stato e la formula di Ackermann.
Sia $p(\lambda)$ un polinomio di grado r con $r-1$ radici a parte reale negativa ed una radice a parte reale non positiva (risp. con r radici a parte reale negativa). Ponendo:

$$K_1 = -g_1 \cdot p(A_{11}),$$

dove g_1 è l'ultima riga della matrice di raggiungibilità associata al sistema (4), il controllore $u = K_1 x_1$ assegna gli autovalori al processo controllato:

$$dx_1/dt = (A_{11} + B_1 K_1)x_1, \tag{5}$$

nelle radici del polinomio $p(\lambda)$, e dunque il sistema (5) è stabile (risp. asintoticamente stabile). Dunque, essendo le ipotesi del Teorema 1 verificate, è chiaro che per qualunque matrice $K_2 \in \mathbb{R}^{m\times(n-r)}$, il controllore:

$$u = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \tilde{x},$$

stabilizza (risp. stabilizza asintoticamente) il sistema (3).
Infine, tenendo conto del cambiamento di coordinate, un controllore che stabilizzi (risp. stabilizzi asintoticamente) il sistema (1) è dato da:

$$u = K\ x,$$

dove:

$$K = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} T.$$

Esercizio 1 *Dato il sistema lineare tempo continuo*

$$dx/dt = Ax + Bu, x \in \mathbb{R}^3, u \in \mathbb{R}, \tag{6}$$

dove

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix};$$

si chiede di:

(i) *studiare se il sistema (6) è stabilizzabile e/o asintoticamente stabilizzabile;*

(ii) *progettare, se esiste, un controllore $u = Kx$ che stabilizzi asintoticamente il sistema (6).*

Svolgimento - Conviene innanzitutto scrivere il sistema (*6*) in forma canonica di raggiungibilità. La matrice di raggiungibilità associata al sistema (*6*) è :

$$R = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

e dunque il sottospazio di raggiungibilità è:

$$\mathcal{P} = \mathcal{R}(R) = span \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Dunque, scegliendo una matrice di trasformazione

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

è possibile portare il sistema (6) nella seguente forma canonica di raggiungibilità:

$$d\tilde{x}/dt = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u \tag{7}$$

dove:

$$\tilde{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Pertanto gli autovalori relativi alla dinamiche non raggiungibili sono:

$$\lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = -1,$$

e dunque il sistema (6) è stabilizzabile asintoticamente e dunque anche stabilizzabile.

Calcoliamo dunque un controllore $u = Kx$ asintoticamente stabilizzante per il sistema (6). La dinamica raggiungibile è rappresentata da:

$$dx_1/dt = x_1 + u,$$

e pertanto scegliendo un controllore $u = kx_1$ ed imponendo ad esempio che l'autovalore nel processo controllato sia -1 si ottiene:

$$dx_1/dt = (1 + k)x_1 = -x_1,$$

da cui $k = -2$. Pertanto un controllore asintoticamente stabilizzante per il sistema (7) è dato da $u = \tilde{K}\tilde{x}$ dove:

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} -2 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}, k_2, k_3 \in \mathbb{R}.$$

Infine tenendo conto del cambiamento di coordinate si ottiene $u = Kx$ dove:

$$\begin{aligned} K = \tilde{K}T &= \begin{bmatrix} -2 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} k_3 & k_2 & k_3 + 2 \end{bmatrix}, k_2, k_3 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Esercizio 2 *Dato il sistema lineare tempo continuo:*

$$dx/dt = Ax + Bu, x \in \mathbb{R}^2, u \in \mathbb{R}, \tag{8}$$

dove:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ a & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R},$$

si chiede di:

(i) *studiare al variare del parametro a, la stabilizzabilità e la stabilizzabilità asintotica del sistema (8);*

(ii) *progettare se esiste un controllore $u = Kx$ che stabilizzi (asintoticamente) il sistema (8).*

Svolgimento - Conviene innanzitutto studiare la raggiungibilità del sistema (8). La matrice di raggiungibilità è:

$$R = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1-a \\ a & a \end{bmatrix},$$

e pertanto il sistema (8) è raggiungibile se e solo se

$$\det(R) = a^2 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0.$$

Studiamo adesso il caso critico $a = 0$. Sostituendo tale valore critico nel sistema (8), si ottengono le seguenti matrici dinamiche:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R},$$

e pertanto per $a = 0$ il sistema (8) è direttamente in forma canonica di raggiungibilità. Dunque l'autovalore $\lambda_1 = 1$ è raggiungibile mentre l'autovalore $\lambda_2 = 0$ è non raggiungibile.
Dall'analisi fatta risulta evidente che il sistema è stabilizzabile per qualunque valore di $a \in \mathbb{R}$ mentre è asintoticamente stabilizzabile se e solo se $a \neq 0$.
Calcoliamo adesso dei controllori stabilizzanti ed asintoticamente stabilizzanti.
Per calcolare un controllore asintoticamente stabilizzante possiamo applicare la formula di Ackermann assegnando gli autovalori per esempio in -1:

$$\begin{aligned} K &= -g \cdot p(A) = \\ &= -\frac{1}{a^2} \begin{bmatrix} -a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4-a & -3 \\ 3a & 1-a \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{a^2} \begin{bmatrix} a^2 - a & 2a+1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

e dunque un controllore asintoticamente stabilizzante per $a \neq 0$ è:

$$u = -\frac{1}{a^2} \begin{bmatrix} a^2 - a & 2a+1 \end{bmatrix} x.$$

Per $a = 0$, possiamo calcolare un esempio di controllore stabilizzante per il sistema (8). La dinamica raggiungibile è rappresentata da:

$$dx_1/dt = x_1 + u,$$

pertanto scegliendo un controllore $u = kx_1$ ed imponendo ad esempio che l'autovalore nel processo controllato sia -1 si ottiene:

$$dx_1/dt = (1+k)x_1 = -x_1,$$

da cui $k = -2$. Pertanto un controllore stabilizzante per il sistema (8) è dato da $u = Kx$ dove:

$$K = \begin{bmatrix} -2 & k_2 \end{bmatrix}, k_2 \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 3 *Dato il sistema lineare tempo continuo:*

$$dx/dt = Ax + Bu, x \in \mathbb{R}^2, u \in \mathbb{R}, \tag{9}$$

dove:

$$A = \begin{bmatrix} -a^2 & 3a^2-8 \\ a^2-2 & a^2-6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} a+2 \\ a+2 \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R},$$

si chiede di:

(i) *studiare al variare del parametro a, la stabilizzabilità e la stabilizzabilità asintotica del sistema (9);*

(ii) *progettare se esiste un controllore che stabilizzi asintoticamente il sistema (9).*

Svolgimento - Conviene innanzitutto scrivere il sistema (9) in forma canonica di raggiungibilità. La matrice di raggiungibilità associata al sistema (9) è :

$$R = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2 & 2a^3+4a^2-8a-16 \\ a+2 & 2a^3+4a^2-8a-16 \end{bmatrix}.$$

E' facile osservare che il rango di R è uno per $a \neq -2$ ed in questo caso il sottospazio di raggiungibilità è:

$$\mathcal{P} = \mathcal{R}(R) = span\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right),$$

da cui, scegliendo ad esempio una matrice di trasformazione:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

è possibile portare il sistema (9) nella seguente forma canonica di raggiungibilità:

$$d\tilde{x}/dt = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u, \tag{10}$$

dove:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 2a^2-8 & 2a^2-6 \\ 0 & -2a^2+2 \end{bmatrix}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} a+2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dall'analisi del sistema (10) è possibile studiare le condizioni di: (i,1) stabilizzabilità e di (ii,2) stabilizzabilità asintotica.
(i,1) L'autovalore non raggiungibile del sistema (10) è $\lambda_2 = -2a^2 + 2$ e pertanto:

$$\lambda_2 \leq 0 \Leftrightarrow a \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty).$$

Inoltre si osservi che l'autovalore $\lambda_1 = 2a^2 - 8$ è raggiungibile se e solo se $a \neq -2$. Pertanto per $a = -2$ l'autovalore λ_1 è non raggiungibile e vale $\lambda_1 = 0$. Siccome in questo caso stiamo studiando la stabilizzabilità (e non la stabilizzabilità asintotica), si ha ancora stabilizzabilità e dunque l'insieme di tutti i valori del parametro a per cui si ha stabilizzabilità è dato da:

$$a \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty).$$

(ii,2) In questo caso l'autovalore non raggiungibile λ_2 deve essere a parte reale non negativa e pertanto:

$$\lambda_2 < 0 \Leftrightarrow a \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty).$$

Inoltre per $a = -2$, l'autovalore $\lambda_1 = 2a^2 - 8$ è non raggiungibile e vale $\lambda_1 = 0$. Dobbiamo dunque escludere il caso critico $a = -2$, e pertanto l'insieme di tutti i valori del parametro a per cui si ha asintotica stabilizzabilità è dato da:

$$a \in (-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup (1, +\infty).$$

Passiamo adesso alla sintesi del controllore asintoticamente stabilizzante. Il sottosistema raggiungibile associato al sistema (10) è:

$$dx_1/dt = \left(2a^2 - 8\right) x_1 + (a+2)u. \tag{11}$$

Imponendo un controllore $u = kx_1$ sul sistema (11), si ottiene il seguente sistema controllato:

$$dx_1/dt = \left(2a^2 - 8 + (a+2)k\right) x_1. \tag{12}$$

Il sistema controllato (12) è asintoticamente stabile se e solo se:

$$2a^2 - 8 + (a+2)k < 0. \tag{13}$$

Scegliendo per esempio:

$$k = \frac{-2a^2}{a+2},$$

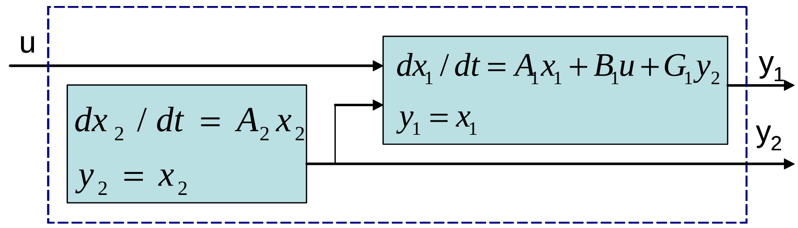
la condizione (13) è verificata per ogni $a \in (-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup (1, +\infty)$, e dunque un controllore asintoticamente stabilizzante per il sistema (10) è dato da $u = \tilde{K}_2 \tilde{x}$ dove:

$$\tilde{K} = \left[\begin{array}{cc} \frac{-2a^2}{a+2} & k_2 \end{array} \right], k_2.$$

Infine, tenendo conto del cambiamento di coordinate si ottiene $u = Kx$ dove:

$$K = \tilde{K}T = \left[\begin{array}{cc} \frac{-2a^2}{a+2} + k_2 & \frac{2a^2}{a+2} + k_2 \end{array} \right], k_2 \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 4 (Homework con soluzione) *Dato il seguente schema di controllo:*



dove:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} a+1 & 3 \\ 0 & 1-a^2 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} a+2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad G_1 = \begin{bmatrix} -a & a+1 \\ -2a^2 & 2a\,(a+1) \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R}.$$

Si chiede di:

(i) *determinare tutti i valori di a affinchè il sistema sia stabilizzabile asintoticamente;*

(ii) *calcolare l'espressione di tale controllore.*

Svolgimento - L'interconnessione del processo in figura ha come rappresentazione con lo spazio di stato:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} dx_1/dt \\ dx_2/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & G_1 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \end{cases} \tag{14}$$

Dall'analisi del sistema (14) ci si accorge che gli autovalori relativi alla matrice dinamica A_2 sono non raggiungibili e pertanto bisogna imporre che:

$$\lambda_{1,2} = a + 1$$
$$\lambda_{2,2} = 1 - a^2,$$

siano negativi. Pertanto si ottiene:

$$\lambda_{1,2} < 0 \Longleftrightarrow a < -1;$$
$$\lambda_{2,2} < 0 \Longleftrightarrow a \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty).$$

Da questa analisi preliminare i valori ammissibili di a per cui contemporaneamente $\lambda_{1,2} < 0$ e $\lambda_{2,2} < 0$ sono

$$a < -1.$$

Inoltre considerando il sottosistema:

$$\begin{cases} dx_1/dt = A_1x_1 + B_1u = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} a+2 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y_1 = x_1, \end{cases} \tag{15}$$

ci si accorge che c'è un autovalore non raggiungibile in $\lambda_{2,1} = -2$, che verifica direttamente la specifica ed un autovalore in $\lambda_{1,1} = 2$, la cui raggiungibilità dipende dalla matrice B_1 parametrizzata da a: da ciò risulta evidente richiedere che l'autovalore $\lambda_{1,1} = 2$ sia raggiungibile e pertanto che:

$$a + 2 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -2.$$

Quindi, il sistema è asintoticamente stabilizzabile se e solo se:

$$a \in (-\infty, -2) \cup (-2, -1).$$

Consideriamo la dinamica raggiungibile relativa al sistema (15), e definiamo la sua variabile di stato $x_{1,1}$. Imponendo un controllore $u = k_{1,1} x_{1,1}$ a tale sistema, si ottiene:

$$dx_{1,1}/dt = 2x_{1,1} + (a+2)k_{1,1}x_{1,1} = (2 + (a+2)k_{1,1})x_{1,1},$$

da cui, imponendo per esempio:

$$2 + (a+2)k_{1,1} = -1,$$

si ottiene:

$$k_{1,1} = \frac{-3}{a+2}.$$

Infine, l'espressione generale del controllore che risolve la specifica al punto (i) è data da:

$$u = \begin{bmatrix} \frac{-3}{a+2} & k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} x, \ \ k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 5 (Homework con soluzione) *Dato il sistema lineare tempo continuo:*

$$dx/dt = Ax + Bu, x \in \mathbb{R}^4, u \in \mathbb{R} \tag{16}$$

dove:

$$A = \begin{bmatrix} a-1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & a^2-1 & 0 & 0 \\ a-1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2-a & 0 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a \\ a-1 \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R},$$

si chiede di studiare la stabilizzabilità e la stabilizzabilità asintotica al variare del parametro a.

Svolgimento - Definiamo una trasformazione di coordinate dello spazio di stato $\mathbb{R}^4$, $\tilde{x} = Tx$ dove:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il sistema così trasformato è dato da:

$$d\tilde{x}/dt = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \tag{17}$$

dove:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; A_{12} = \begin{bmatrix} a-1 & 0 \\ 0 & 2-a \end{bmatrix};$$
$$A_{22} = \begin{bmatrix} a-1 & 0 \\ 3 & a^2-1 \end{bmatrix}; B_1 = \begin{bmatrix} a \\ a-1 \end{bmatrix}$$

Si noti che il sistema (17) è in forma canonica di raggiungibilità e pertanto gli autovalori $\lambda_3 = a-1, \lambda_4 = a^2-1$, relativi alla matrice dinamica A_{22}, sono non raggiungibili. Dunque affinchè si abbia stabilizzabilità deve essere:

$$\lambda_3 \leq 0 \Leftrightarrow a \leq 1,$$
$$\lambda_4 \leq 0 \Leftrightarrow a \in [-1, 1],$$

da cui:

$$a \in [-1, 1],$$

ed affinchè si abbia stabilizzabilità asintotica deve essere:

$$\lambda_3 < 0 \Leftrightarrow a < 1,$$
$$\lambda_4 < 0 \Leftrightarrow a \in (-1, 1),$$

da cui:

$$a \in (-1, 1).$$

Consideriamo adesso il sistema:

$$d\tilde{x}_1/dt = A_{11} z_1 + B_1 u. \tag{18}$$

Innanzitutto conviene studiare la raggiungibilità del sistema (18). La matrice di raggiungibilità associata a tale sistema è:

$$R_1 = \begin{bmatrix} B_1 & A_{11}B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 3a-2 \\ a-1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dunque il sistema (18) è raggiungibile se e solo se:

$$\det(R_1) = -(3a-2)(a-1) \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 2/3; a \neq 1.$$

Da ciò si evince che per $a \neq 2/3$ e $a \neq 1$, il sistema (18) è stabilizzabile e stabilizzabile asintoticamente.
Studiamo adesso i caso singolari. E' facile osservare che gli autovalori della matrice A_{11} sono:

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1.$$

Caso 1) Sia $a = 2/3$ e cerchiamo in questo caso quali sono gli autovalori raggiungibili e non raggiungibili del sistema (18). Per fare ciò utilizziamo il PBH Test:

$$\rho\left(\left[\begin{array}{c|c} A_{11}-\lambda_1 I & B_1 \end{array}\right]\right) = \rho\left(\left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 2/3 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{array}\right]\right) = 2,$$
$$\rho\left(\left[\begin{array}{c|c} A_{11}-\lambda_2 I & B_1 \end{array}\right]\right) = \rho\left(\left[\begin{array}{ccc} 0 & 2 & 2/3 \\ 0 & -1 & -1/3 \end{array}\right]\right) = 1.$$

In questo caso si evince che l'autovalore $\lambda_1 = 0$ è raggiungibile e l'autovalore instabile $\lambda_2 = 1$ è non raggiungibile. Da ciò desumiamo che per $a = 2/3$ non si ha stabilizzabilità e dunque neanche stabilizzabilità asintotica.
caso 2) Sia $a = 1$ e cerchiamo in questo caso quali sono gli autovalori raggiungibili e non raggiungibili del sistema (18). Per fare ciò utilizziamo di nuovo il PBH Test:

$$\rho\left(\left[\begin{array}{c|c} A_{11}-\lambda_1 I & B_1 \end{array}\right]\right) = \rho\left(\left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]\right) = 1,$$
$$\rho\left(\left[\begin{array}{c|c} A_{11}-\lambda_2 I & B_1 \end{array}\right]\right) = \rho\left(\left[\begin{array}{ccc} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right]\right) = 2.$$

In questo caso si evince che l'autovalore $\lambda_1 = 0$ è non raggiungibile e l'autovalore, instabile $\lambda_2 = 1$ è raggiungibile. Da ciò desumiamo che per $a = 1$ si ha stabilizzabilità ma non stabilizzabilità asintotica.
Riassumendo i risultati si ottiene:

- Il sistema (16) è stabilizzabile se e solo se:

$$a \in [-1, 2/3) \cup (2/3, 1]\,;$$

- Il sistema (16) è stabilizzabile asintoticamente se e solo se:

$$a \in (-1, 2/3) \cup (2/3, 1)\,.$$