Corso di Controlli Automatici
Proff. M. D. Di Benedetto e S. Di Gennaro

Esercitazione del 10/5/2011

Ing. Alessandro Borri, Prof. Giordano Pola
{alessandro.borri,giordano.pola}@univaq.it

1 Il teorema di assegnazione degli autovalori

Il problema dell'assegnazione degli autovalori con retroazione statica dallo stato consiste nel trovare, se esiste, un controllore con retroazione lineare e statica dallo stato tale che il processo controllato abbia gli autovalori coincidenti con dei valori desiderati.
Più formalmente, dato un sistema lineare tempo continuo:

$$\begin{cases} dx/dt = Ax + Bu, x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, \\ y = x, y \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{1}$$

ed un polinomio di grado n:

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0,$$

il problema di *assegnazione degli autovalori con retroazione statica dallo stato* consiste nel trovare un controllore $u = Kx$ tale che gli autovalori del processo controllato:

$$\begin{cases} dx/dt = (A + BK)x \\ y = x, \end{cases}$$

coincidano con le radici del polinomio $p(\lambda)$.
Il seguente risultato caratterizza completamente questo problema.

Teorema *Il problema dell'assegnazione degli autovalori con retroazione statica dallo stato ha soluzione se e solo se il sistema (1) è raggiungibile.*

Inoltre, qualora le ipotesi di raggiungibilità siano verificate, è possibile sintetizzare un controllore statico che risolva il problema in esame in modo esplicito. Detta g l'ultima riga dell'inversa della matrice di raggiungibilità associata al sistema (1), il controllore

$$u = -g \cdot p(A) \cdot x, \tag{2}$$

risolve il problema dell'assegnazione degli autovalori con retroazione statica dallo stato. La formula (2) è nota in letteratura come *formula di Ackermann*.
In questo paragrafo diremo che un autovalore λ è raggiungibile (risp. non raggiungibile) se λ è un autovalore relativo ad una dinamica raggiungibile (risp. non raggiungibile). La raggiungibilità del generico autovalore λ della matrice A si può valutare mediante il PBH test

$$\lambda \text{ raggiungibile} \Leftrightarrow \rho\left(\begin{bmatrix} A - \lambda I & | & B \end{bmatrix}\right) = n.$$

In alternativa, nel caso in cui il rango della matrice di raggiungibilità associata al sistema (1) sia $r < n$ (sistema non raggiungibile), è possibile separare le dinamiche raggiungibili da quelle non raggiungibili applicando una opportuna trasformazione di coordinate $\tilde{x} = Tx$ nello spazio di stato $\mathbb{R}^n$ che ci permetta di riscrivere il sistema

$$dx/dt = Ax + Bu \tag{3}$$

in forma canonica di raggiungibilità:

$$d\tilde{x}/dt = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u, \tag{4}$$

dove:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$A_{11} \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{r \times m}$ e la coppia (A_{11}, B_1) è raggiungibile o, in modo equivalente, il sistema lineare:

$$dx_1/dt = A_{11}x_1 + B_1 u \tag{5}$$

è raggiungibile. Gli r autovalori di A_{11} e gli $n-r$ autovalori di A_{22} sono rispettivamente gli autovalori raggiungibili e non raggiungibili della matrice A.

Esercizio 1 *Sia dato il seguente sistema lineare tempo continuo*

$$dx/dt = Ax + Bu, x \in \mathbb{R}^3, u \in \mathbb{R}, \tag{6}$$

dove:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si determini, se possibile, un controllore con retroazione statica dallo stato che assegni gli autovalori del sistema controllato in $\lambda_1 = -1 + j$; $\lambda_2 = -1 - j$; $\lambda_3 = -2$.

Svolgimento - La matrice di raggiungibilità del sistema (6) è

$$R = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

E' facile verificare che il rango di R è tre e pertanto il sistema (6) è raggiungibile: dunque è possibile trovare un controllore che assegni gli autovalori come richiesto. Il polinomio $p(\lambda)$, le cui radici coincidono con quelle richieste, è dato da

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) = \\ &= (\lambda - (-1 + j))(\lambda - (-1 - j))(\lambda - (-2)) = \\ &= (\lambda + 1 - j)(\lambda + 1 + j)(\lambda + 2) \\ &= \lambda^3 + 4\lambda^2 + \left(5 - j^2\right)\lambda + 2 - 2j^2 = \\ &= \lambda^3 + 4\lambda^2 + 6\lambda + 4. \end{aligned}$$

Utilizziamo dunque la formula di Ackermann (2) per sintetizzare il controllore $u = Kx$. L'inversa della matrice di raggiungibilità R è data da:

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} 5/4 & 1/4 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/4 & -1/4 & 0 \end{bmatrix}$$

e pertanto $g = \begin{bmatrix} -1/4 & -1/4 & 0 \end{bmatrix}$. Da cui, calcolando

$$\begin{aligned} p(A) &= A^3 + 4A^2 + 6A + 4I = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}^3 + 4\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}^2 + 6\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 15 & -6 & -19 \\ 0 & -7 & 7 \\ 0 & 14 & 21 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

otteniamo:

$$\begin{aligned} K = -g \cdot p(A) &= -\begin{bmatrix} -1/4 & -1/4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 15 & -6 & -19 \\ 0 & -7 & 7 \\ 0 & 14 & 21 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{15}{4} & -\frac{13}{4} & -3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Esercizio 2 *Dato il sistema lineare tempo continuo*

$$dx/dt = Ax + Bu, x \in \mathbb{R}^3, u \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

dove:

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 0 \\ -2 & -6 & 2 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

si determini la classe dei controllori a retroazione statica dallo stato tali che il sistema controllato abbia gli autovalori in $\lambda_1 = -1$; $\lambda_2 = -2$; $\lambda_3 = -3$.

Svolgimento - La matrice di raggiungibilità associata al sistema (7) è :

$$R = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 20 \\ 1 & -6 & 36 \\ 0 & -2 & 20 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

E' facile verificare che il rango di R è due e pertanto le condizioni del teorema dell'assegnazione dei autovalori con retroazione statica dallo stato non sono verificate: ciò implica che non è possibile assegnare in modo arbitrario gli autovalori del processo controllato. D'altronde, qualora gli autovalori relativi alle dinamiche non raggiungibili fossero tra quelli richiesti nella specifica, sarebbe possibile comunque progettare un controllore tale che il processo controllato abbia autovalori in $\lambda_1 = -1$; $\lambda_2 = -2$; $\lambda_3 = -3$. Verifichiamo dunque quali autovalori della matrice A sono raggiungibili e non raggiungibili. Gli autovalori della matrice A sono:

$$\lambda_1^A = -2; \quad \lambda_2^A = -4; \quad \lambda_3^A = -6 \ .$$

Per mezzo del PBH test valutiamo quali degli autovalori di A sono raggiungibili:

$$\rho\left(\begin{bmatrix} A - \lambda_1^A I & \mid & B \end{bmatrix}\right) = \rho\left(\begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 2,$$

$$\rho\left(\begin{bmatrix} A - \lambda_2^A I & \mid & B \end{bmatrix}\right) = \rho\left(\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}\right) = 3,$$

$$\rho\left(\begin{bmatrix} A - \lambda_3^A I & \mid & B \end{bmatrix}\right) = \rho\left(\begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}\right) = 3,$$

e dunque l'autovalore $\lambda_1^A = -2$ è non raggiungibile mentre gli autovalori $\lambda_2^A = -4$ e $\lambda_3^A = -6$ sono raggiungibili. Come è ben noto dalla teoria dei sistemi lineari le dinamiche non raggiungibili non sono accessibili al controllo e per questa ragione rimangono immutate nel processo controllato. D'altronde l'autovalore $\lambda_1^A = \lambda_2$ e le restanti due dinamiche sono raggiungibili e come tali, è possibile forzare in loro, il comportamento desiderato dalle specifiche stesse. Dalla discussione fatta, risulta che è conveniente scrivere il sistema di partenza in forma canonica di raggiungibilità in modo da estrarre le dinamiche raggiungibili cui applicare il teorema dell'assegnazione degli autovalori per imporre gli autovalori restanti dalle specifiche:

$$\lambda_1 = -1; \lambda_3 = -3.$$

Osservando la matrice di raggiungibilità in R è facile verificare che il sottospazio di raggiungibilità è:

$$\mathcal{P} = \mathcal{R}(R) = \mathcal{R}(V), \quad V = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sulla base del sottospazio $\mathcal{P}$ è possibile costruire la matrice di trasformazione T che porti il sistema (7) in forma canonica di raggiungibilità. Ricordiamo che:

$$T^{-1} = \left[\begin{array}{cc} V & v \end{array} \right],$$

dove v è un vettore che renda la matrice T^{-1} invertibile. Dunque per una scelta di $v = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right]$ si ha

$$T^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right],$$

da cui:

$$T = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{array} \right].$$

Sulla base di T possiamo costruire la forma canonica di raggiungibilità associata al sistema (7):

$$d\tilde{x}/dt = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u, \tag{9}$$

dove:

$$\tilde{A} = TAT^{-1} = \left[\begin{array}{cc} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc} -6 & 0 & -2 \\ -2 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{array} \right];$$

$$\tilde{B} = TB = \left[\begin{array}{c} B_1 \\ 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right];$$

Il sottosistema raggiungibile è:

$$dx_1/dt = A_{11}x_1 + B_1u, \tag{10}$$

dove:

$$A_{11} = \left[\begin{array}{cc} -6 & 0 \\ -2 & -4 \end{array} \right]; B_1 = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right].$$

La matrice di raggiungibilità associata al sistema (10) è

$$R_1 = \left[\begin{array}{cc} B_1 & A_{11}B_1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} 1 & -6 \\ 0 & -2 \end{array} \right].$$

Si noti che la matrice R_1 è invertibile e pertanto possiamo applicare il teorema dell'assegnazione degli autovalori con retroazione statica dallo stato al sistema (10), imponendo un polinomio caratteristico:

$$p(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda + 3) = \lambda^2 + 4\lambda + 3.$$

Si osservi che:

$$R_1^{-1} = \left[\begin{array}{cc} 1 & -3 \\ 0 & -1/2 \end{array} \right]$$

da cui:

$$g_1 = \left[\begin{array}{cc} 0 & -1/2 \end{array} \right].$$

Inoltre:

$$p(A_{11}) = {A_{11}}^2 + 4A_{11} + 3I = \left[\begin{array}{cc} 15 & 0 \\ 12 & 3 \end{array} \right].$$

Dunque, applicando la formula di Ackermann, si ottiene:

$$\begin{aligned}K_1 &= -g_1 \cdot p(A_{11}) \\ &= -\begin{bmatrix} 0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 12 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6 & 3/2 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Dunque applicando un controllore $u = K_1 x_1$ al sistema (10), otteniamo un sistema controllato i cui autovalori coincidono in $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_3 = -3$. La classe di controllori che verifica le specifiche dell'esercizio per il sistema in forma canonica di raggiungibilità (9) è data da $u = \tilde{K}\tilde{x}$, dove $\tilde{K} = \begin{bmatrix} -6 & -3/2 & k \end{bmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$. Infine, tenendo conto del cambiamento di coordinate si ottiene:

$$\begin{aligned}u &= \tilde{K}\tilde{x} = \tilde{K}Tx \\ &= \begin{bmatrix} 6 & 3/2 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} x \\ &= \begin{bmatrix} k & 6 & 3/2 - k \end{bmatrix} x, k \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Esercizio 3 (Homework con soluzione) *Dato il sistema lineare tempo continuo:*

$$dx/dt = Ax + Bu, x \in \mathbb{R}^2, u \in \mathbb{R}, \tag{11}$$

dove:

$$A = \begin{bmatrix} 4-a^2 & -1 \\ a & -a-1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R},$$

si determinino tutti i valori del parametro a e la classe dei controllori a retroazione statica dallo stato tali che il sistema controllato abbia gli autovalori coincidenti in -2*.*

Svolgimento - La matrice di raggiungibilità associata al sistema (11) è:

$$R = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3-a^2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

da cui $\rho(R) = 2$ se e solo se $a \neq -2$ e $a \neq 2$. Dunque per $a \neq -2$ e $a \neq 2$ le ipotesi del teorema di assegnazione degli autovalori con retroazione statica dallo stato sono verificate e pertanto è possibile assegnare ad arbitrio gli autovalori ed in particolare in -2. Per i valori di singolarità $a = -2$ e $a = 2$ bisogna studiare gli autovalori non raggiungibili e verificare se questi autovalori verificano direttamente le specifiche. Vediamo in dettaglio ogni caso.

Caso 1) $a \neq -2, a \neq 2$.

In questo caso R è invertibile e possiamo quindi applicare la formula di Ackermann imponendo un polinomio:

$$p(\lambda) = (\lambda+2)^2 = \lambda^2 + 4\lambda + 4,$$

da cui:

$$p(A) = A^2 + 4A + 4I = \begin{bmatrix} a^4 - 12a^2 - a + 36 & a^2 + a - 7 \\ -a^3 - a^2 + 7a & a^2 - 3a + 1 \end{bmatrix},$$

Invertendo la matrice di raggiungibilità R si ottiene:

$$R^{-1} = \frac{1}{a^2-4} \begin{bmatrix} -1 & a^2-3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

da cui:

$$g = \frac{1}{a^2-4} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pertanto:

$$\begin{aligned} K &= -g \cdot p(A) \\ &= -\frac{1}{a^2-4} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^4 - 12a^2 - a + 36 & a^2 + a - 7 \\ -a^3 - a^2 + 7a & a^2 - 3a + 1 \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{a^2-4} \begin{bmatrix} -a^4 - a^3 + 11a^2 + 8a - 36 & -4a + 8 \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{a+2} \begin{bmatrix} -a^3 - 3a^2 + 5a + 18 & -4 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{12}$$

Caso 2) $a = -2$.

In questo caso R è singolare e pertanto dobbiamo verificare se l'autovalore non raggiungibile della matrice A è in -2. Pertanto calcoliamo gli autovalori della matrice A nel caso in cui $a = -2$:

$$\lambda_1^A = -1; \lambda_2^A = 2.$$

Siccome entrambi gli autovalori di A non coincidono in -2 ed uno di essi è non raggiungibile, in questo caso le specifiche dell'esercizio non potranno essere soddisfatte.

Caso 3) $a = 2$.

Anche in questo caso R è singolare e pertanto dobbiamo verificare se l'autovalore non raggiungibile della matrice A è in -2. Innanzitutto occorre calcolare gli autovalori della matrice A nel caso in cui $a = 2$:

$$\lambda_1^A = -1; \quad \lambda_2^A = -2 \ .$$

Per individuare l'autovalore non raggiungibile possiamo studiare la forma canonica di raggiungibilità. La matrice di raggiungibilità R in questo caso è:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

e dunque

$$\mathcal{P} = \mathcal{R}(R) = \mathcal{R}(v_1), \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix};$$

quindi scegliendo un vettore $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ linearmente indipendente da v_1, otteniamo:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

da cui:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Possiamo a questo punto calcolare la forma canonica di raggiungibilità:

$$d\tilde{x}/dt = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u, \tag{13}$$

dove:

$$\tilde{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix};$$
$$\tilde{B} = TB = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Infine, osservando la forma canonica di raggiungibilità, ci si accorge che l'autovalore non raggiungibile coincide con -2 e dunque in questo caso esiste un controllore che verifichi la specifica, un controllore cioè che forzi l'autovalore -1, relativo alla dinamica raggiungibile, in -2. Il sottosistema raggiungibile è:

$$dx_1/dt = -x_1 + u,$$

e dunque scegliendo $u = k_1 x$ ed imponendo l'autovalore -2 nel processo controllato otteniamo,

$$dx_1/dt = -x_1 + k_1 x_1 = (-1 + k_1)x_1 = -2x_1.$$

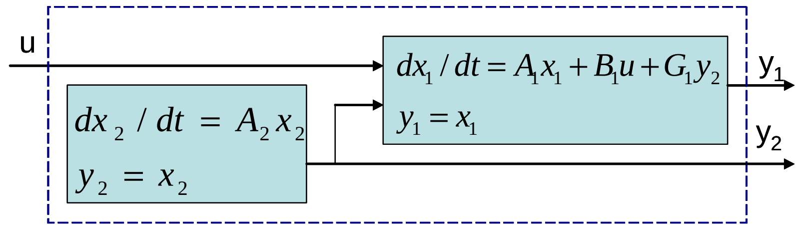
e dunque tale condizione è verificata se e solo se $k_1 = -1$. La classe di controllori che verifica le specifiche per il sistema in forma canonica di raggiungibilità (13) è data da $u = \tilde{K}\tilde{x}$, dove $\tilde{K} = \begin{bmatrix} -1 & k \end{bmatrix}, k \in \mathbb{R}$. Infine, tenendo conto del cambiamento di coordinate, si ottiene:

$$\begin{aligned} u &= \tilde{K}\tilde{x} = \tilde{K}Tx \\ &= \begin{bmatrix} -1 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} -1-k & k \end{bmatrix} x, k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Possiamo infine riassumere i risultati: l'esercizio ha soluzione se e solo se $a \neq -2$. Inoltre la classe dei controllori richiesta è data da $u = Kx$ dove:

$$K = \begin{cases} -\frac{1}{a+2} \begin{bmatrix} -a^3 - 3a^2 + 5a + 18 & -4 \end{bmatrix}, & a \neq -2, \\ \\ \begin{bmatrix} -1-k & k \end{bmatrix}, & a = 2. \end{cases}$$

Esercizio 4 (Homework con soluzione) *Dato il seguente schema di controllo:*



dove:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1-a^2 & 3 \\ 0 & a^3+a^2-4a-7 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} a^2+a-2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad G_1 = \begin{bmatrix} -2a^3 & a+1 \\ -4a^4 & 2a\,(a+1) \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R}.$$

Si chiede di:

(i) *determinare tutti i valori di a affinchè esista un controllore a retroazione statica lineare dallo stato tale che il processo controllato abbia gli autovalori coincidenti in -3;*

(ii) *calcolare l'espressione di tale controllore.*

Svolgimento - L'interconnessione del processo in figura ha come rappresentazione con lo spazio di stato:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} dx_1/dt \\ dx_2/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & G_1 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \end{cases} \tag{14}$$

Dall'analisi del sistema (14) ci si accorge che gli autovalori relativi alla matrice dinamica A_2 sono non raggiungibili e pertanto bisogna imporre che gli autovalori di A_2:

$$\lambda_{1,2} = 1 - a^2,$$
$$\lambda_{2,2} = a^3 + a^2 - 4a - 7,$$

coincidano in -3. Pertanto:

$$\lambda_{1,2} = -3 \Longleftrightarrow a = -2; 2;$$
$$\lambda_{2,2} = -3 \Longleftrightarrow a = -1; -2; 2.$$

Da questa analisi preliminare i valori ammissibili di a per cui contemporaneamente $\lambda_{1,2} = -3$ e $\lambda_{2,2} = -3$ sono:

$$a = -2; a = 2. \tag{15}$$

Inoltre il sottosistema:

$$\begin{cases} dx_1/dt = A_1x_1 + B_1u = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} a^2+a-2 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y_1 = x_1 \end{cases} \tag{16}$$

è in forma canonica di raggiungibilità e pertanto è evidente che c'è un autovalore non raggiungibile in $\lambda_{2,1} = -3$ che verifica direttamente la specifica ed un autovalore in $\lambda_{1,1} = 1$, la cui raggiungibilità dipende dalla matrice B_1 parametrizzata da a: da ciò risulta evidente richiedere che l'autovalore $\lambda_{1,1} = 1$ sia raggiungibile e pertanto che:

$$a^2 + a - 2 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -2, a \neq 1. \tag{17}$$

Combinando le condizioni (15) e (17) si evince che il valore del parametro richiesto per soddisfare le specifiche in (i) è $a = 2$.
La seconda parte dell'esercizio richiede di determinare un controllore che verifichi le specifiche richieste nel punto (i). A tal fine riscriviamo il sistema (16) per $a = 2$,

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} dx_{1,1}/dt \\ dx_{1,2}/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} u, \\ y_1 = x_1. \end{cases}$$

Focalizzando l'attenzione alla dinamica raggiungibile relativa alla variabile $x_{1,1}$ ed imponendo un controllore $u = k_{1,1}x_{1,1}$, la condizione richiesta al punto (i) impone:

$$dx_{1,1}/dt = x_{1,1} + 4k_{1,1}x_{1,1} = (1 + 4k_{1,1})x_{1,1} = -3x_{1,1},$$

da cui $k_{1,1} = -1$. Infine l'espressione generale del controllore che risolve la specifica al punto (i) è data da:

$$u = \begin{bmatrix} -1 & k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} x, \;\; k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 5 (Homework con soluzione) *Dato il sistema lineare tempo continuo:*

$$dx/dt = Ax + Bu, x \in \mathbb{R}^2, u \in \mathbb{R}, \tag{18}$$

dove:

$$A = \frac{1}{(a^2+1)} \begin{bmatrix} -a^4 - 7a^2 - 2a - 6 & 2a^4 + 20a^2 + 4a + 12 \\ -a & 3a^2 + 2a \end{bmatrix};$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R},$$

si determini se esiste, un controllore con retroazione statica dallo stato, indipendente dal parametro a, tale che il processo controllato abbia autovalori tutti a parte reale minore di -5.

Svolgimento - Il sistema (18) è parametrico in a ma si richiede un controllore che sia indipendente dal parametro e che verifichi le specifiche. E' conveniente prima di tutto sintetizzare un controllore parametrico in a, che verifichi le specifiche e poi cercare un controllore "robusto" che soddisfi le specifiche per ogni valore di $a \in \mathbb{R}$. Calcoliamo innanzitutto la matrice di raggiungibilità:

$$R = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{6a^2}{a^2+1} \\ 1 & \frac{3a^2}{a^2+1} \end{bmatrix}.$$

E' facile verificare che il rango della matrice di R è uno per qualunque valore del parametro $a \in \mathbb{R}$ e pertanto le ipotesi del teorema dell'assegnazione degli autovalori con restroazione statica dallo stato non sono verificate: ciò implica che esiste un autovalore non raggiungibile. Per calcolare gli autovalori relativi alle dinamiche non raggiungibili e gli autovalori relativi alle dinamiche raggiungibili conviene calcolare la forma canonica di raggiungibilità. Pertanto il sottospazio di raggiungibilità è:

$$\mathcal{P} = \mathcal{R}(R) = \mathcal{R}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right),$$

da cui è possibile costruire la matrice di trasformazione T che porti il sistema (18) in forma canonica di raggiungibilità. Scegliendo un vettore $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ si ottiene:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

da cui:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Sulla base di T possiamo costruire la forma canonica di raggiungibilità associata al sistema (18):

$$d\tilde{x}/dt = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u, \tag{19}$$

dove:

$$\tilde{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{a^2+1} \begin{bmatrix} 3a^2 & -a \\ 0 & -(a^2+6)(a^2+1) \end{bmatrix};$$

$$\tilde{B} = TB = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix};$$

L'autovalore relativo alla dinamica non raggiungibile è:

$$\lambda_{non\_ragg} = -(a^2+6)$$

e pertanto:
$$\lambda_{non\_ragg} < -5 \Longleftrightarrow -a^2 < 1;$$
dunque $\lambda_{non\_ragg} < -5$ per ogni valore di $a \in \mathbb{R}$ e pertanto λ_{non_ragg} verifica le specifiche. Il sottosistema raggiungibile è:
$$dx_1/dt = \frac{3a^2}{a^2+1}x_1 + u. \tag{20}$$
Scegliendo un controllore $u = k_1 x_1$ e sostituendo in (20), otteniamo
$$dx_1/dt = \left(\frac{3a^2}{a^2+1} + k_1\right)x_1.$$
Dunque l'autovalore relativo alla dinamica raggiungibile nel processo controllato è $\lambda_{ragg} = \frac{3a^2}{a^2+1} + k_1$. Imponendo la specifica, si ottiene:
$$\lambda_{ragg} < -5 \Longleftrightarrow k_1 < -5 - \frac{3a^2}{a^2+1}. \tag{21}$$
A questo punto è necessario scegliere un controllore e dunque un parametro k_1 che verifichi la condizione (21). A tal fine si osservi che:
$$0 \leq \frac{a^2}{a^2+1} < 1, \forall a \in \mathbb{R},$$
da cui scegliendo un qualsiasi:
$$k_1 < -8$$
la specifica richiesta nell'esercizio è verificata.
Dunque la classe di controllori che verifica le specifiche per il sistema in forma canonica di raggiungibilità (19) è data da $u = \tilde{K}\tilde{x}$, dove $\tilde{K} = \left[\begin{array}{cc} k_1 & k_2 \end{array}\right], k_1 < -8, k_2 \in \mathbb{R}$. Infine, tenendo conto del cambiamento di coordinate si ottiene
$$\begin{aligned} u &= \tilde{K}\tilde{x} = \tilde{K}Tx \\ &= \left[\begin{array}{cc} k_1 & k_2 \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{array}\right]x \\ &= \left[\begin{array}{cc} k_2 & k_1 - 2k_2 \end{array}\right]x,\ k_1 < -8, k_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$